

NASTAWY REGULATORÓW TYPU PID DLA TYPOWYCH OBIEKTÓW

Obiekty i regulatory. Bezpieczne nastawy - metoda tabelaryczna. Bezpieczne nastawy – przykłady wyprowadzeń dla obiektów bez opóźnień i z opóźnieniem. Przykład I – obiekt „prosty”. Odpowiedź na zakłócenie. Przykład II – obiekt „trudny”. Metody tabelaryczne: Poradnik Inżyniera – Automatyka, Handbook of PI and PID controller tuning rules.

OBIEKTY I REGULATORY

1. Obiekty w automatyce

Typowymi transmitancjami opisującymi lub aproksymującymi dynamikę obiektów w automatyce procesów technologicznych, takich jak zbiorniki, piece, reaktory chemiczne, kotły, turbiny, generatory itd., są:

$$\frac{k_o}{Ts+1}, \quad \frac{1}{T_c s}, \quad \frac{k_o}{(Ts+1)^2}, \quad \frac{1}{T_c s(Ts+1)}, \quad e^{-\tau s}, \quad \frac{k_o}{Ts+1} e^{-\tau s}, \quad \frac{k_o}{(Ts+1)^2} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$$

2. Regulatory I, PI, PID

Składowa całkująca I algorytmu regulacji eliminuje błąd ustalony po wystąpieniu stałego, utrzymującego się zakłócenia.

- PI: $k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$

$$\text{PID: } k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{D} s + 1} \right) \underset{D \gg 1}{\cong} k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad \text{typowo } D = 5 \dots 8$$

- I: jako PI dla $k_{p,\min} < 1$

$$k_{p,\min} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = k_{p,\min} + \frac{k_{p,\min}}{T_i s} \underset{\text{male } T_i}{\cong} \frac{k_{p,\min}}{T_i s} = \frac{k_i}{s}, \quad k_i = \frac{k_{p,\min}}{T_i}$$

- Typowe T_d w PID

$$\boxed{T_d = \frac{T_i}{4}}$$

Ziegler i Nichols, 1943

„różniczkowanie = ćwiartka całkowania”

tzw. PID „o podwójnym zerze”

$$\text{PID: } k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_p \frac{\left(\frac{T_i}{2} s + 1 \right)^2}{T_i s}$$

- PID „z dwoma zerami”

$$\text{PID: } k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_r \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s}, \quad T_i = T_1 + T_2, \quad T_d = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \quad k_p = k_r (T_1 + T_2)$$

- **Bezpieczne nastawy**

Są to nastawy regulatora PID/PI/I, które dla typowej transmitancji wiernie odpowiadającej obiektowi zapewniają przebiegi aperiodyczne krytyczne, a dla transmitancji w miarę dobrze aproksymującej obiekt przebiegi z niewielkim przeregulowaniem lub niedoregulowaniem.

Prostym sposobem doboru czasu całkowania T_i jest eliminacja stałej czasowej obiektu (lub dwóch stałych czasowych).

W układach II rzędu przebiegi aperiodyczne krytyczne otrzymuje się wówczas, gdy mianownik transmitancji układu zamkniętego ma $\Delta=0$.

Typowe obiekty – proste transmitancje łatwo identyfikowalne na podstawie odpowiedzi skokowych lub bramkowych

Pytania

- jaki algorytm regulacji PID zastosować ?
- jakie nastawy dają w miarę szybkie przebiegi bez przeregulowań (bezpieczne nastawy)?

Wymagania dotyczące rozwiązania

- minimum danych wejściowych (transmitancja i ew. czas regulacji)
- proste wzory algebraiczne

	Obiekt		Regulator	Nastawy			Czas regulacji t_r
	Nazwa	Transmitancja		k_p	T_i	T_d	
1	Inercja	$\frac{k_o}{Ts + 1}$	PI	$\frac{4T}{t_r k_o}$	T	–	dany
2	Integrator	$\frac{k_o}{s}$	PI	$\frac{8}{t_r k_o}$	$\frac{t_r}{2}$	–	dany
3	Podwójna inercja	$\frac{k_o}{(Ts + 1)^2}$	PID	$\frac{8T}{t_r k_o}$	$2T$	$\frac{T_i}{4}$	dany
4	Integrator z inercją	$\frac{k_o}{s(Ts + 1)}$	PID	$4 \frac{T_1 + T_2}{k_o}$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	dany
				$T_1 = T$	$T_2 = \frac{t_r}{2}$		

	Obiekt		Regulator	Nastawy			Czas regulacji t_r
	Nazwa	Transmitancja		k_p	T_i	T_d	
	5	Opóźnienie		$k_o e^{-\tau s}$	I	$k_i = 0.34 \frac{1}{k_o \tau}$	
6	Inercja z opóźnieniem	$\frac{k_o}{Ts+1} e^{-\tau s}$	PI	$0.34 \frac{T}{k_o \tau}$	τ	-	5τ
7	Podwójna inercja z opóźnieniem	$\frac{k_o}{(Ts+1)^2} e^{-\tau s}$	PID	$0.68 \frac{T}{k_o \tau}$	$2T$	$\frac{T_i}{4}$	5τ
8	Integrator z inercją i opóźnieniem	$\frac{k_o}{s(Ts+1)} e^{-\tau s}$	PID	$0.44 \frac{T_1+T_2}{k_o T_2 \tau}$	T_1+T_2	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$	7.5τ
				$T_1 = T \quad T_2 = 6.25\tau$			

	Obiekt		Regulator	Nastawy			Czas regulacji t_r
	Nazwa	Transmitancja		k_p	T_i	T_d	
9	Podwójny integrator	$\frac{k_o}{s^2}$	PID	$\frac{216}{t_r^2 k_o}$	$\frac{t_r}{2}$	$\frac{T_i}{4}$	dany
10	Obiekt oscylacyjny	$\frac{k_o}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $\xi < 1$	PID	$\frac{216}{t_r^2 k_o} \omega_n^2$	$\frac{t_r}{2}$	$\frac{T_i}{4}$	dany
11	Obiekt niestabilny	$\frac{k_o}{s^2 - \omega^2}$	PID	$\frac{1}{k_o} \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} \frac{s_b(\omega - s_b)}{s_b + z}$	T_1+T_2	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$	dany
				$T_1 = \frac{1}{\omega}, \quad T_2 = \frac{1}{z}, \quad s_b = -z - \sqrt{z(z+\omega)}$ $z + \sqrt{z(z+\omega)} = \frac{4}{t_r}$			

Przykład. Dla obiektu o transmitancji typu podwójna inercja z opóźnieniem o parametrach $k_o=2.5$, $T=5$, $\tau=1.5$ dobierz parametry regulatora typu PID metodą tabelaryczną oraz wykonaj symulację w pakiecie Matlab.

Obiekt		Regulator	Nastawy			Czas regulacji t_r
Nazwa	Transmitancja		k_p	T_i	T_d	
Podwójna inercja z opóźnieniem	$\frac{k_o}{(Ts+1)^2} e^{-\tau s}$	PID	$0.68 \frac{T}{k_o \tau}$	$2T$	$\frac{T_i}{4}$	5τ

Dobór nastaw regulatora PID „o podwójnym zerze” $k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_p \frac{\left(\frac{T_i}{2} s + 1 \right)^2}{T_i s}$

```
clear all
clc

ko=2.5
T=5
tau=1.5

[Lp Mp]=pade(tau,12)
Lo=ko*Lp;
Mo=conv([T 1],[T 1]);
Mo=conv(Mo,Mp);

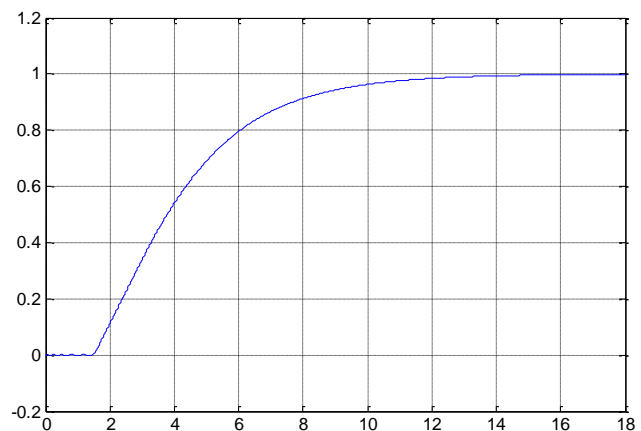
kp=0.68*T/(ko*tau)
Ti=2*T
Td=Ti/4

Lr=kp*conv([Ti/2 1],[Ti/2 1]);
Mr=Ti*[1 0]

Lz=conv(Lr,Lo);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz]

t=0:0.01:12*tau;

y=step(Lz,Mz,t);
plot(t,y);grid
```



Przykład. Dla obiektu o transmitancji typu integrator z inercją i opóźnieniem o parametrach $k_o=2.5$, $T=5$, $\tau=1.5$ dobierz parametry regulatora typu PID metodą tabelaryczną oraz wykonaj symulację w pakiecie Matlab i Simulink.

Obiekt		Regulator	Nastawy			Czas regulacji t_r	
Nazwa	Transmitancja		k_p	T_i	T_d		
8	Integrator z inercją i opóźnieniem		$\frac{k_o}{s(Ts+1)} e^{-\tau s}$	PID	$0.44 \frac{T_1+T_2}{k_o T_2 \tau}$	T_1+T_2	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$
				$T_1 = T$	$T_2 = 6.25\tau$		

Dobór nastaw regulatora PID „z dwoma zerami” $k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_r \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s}$

Matlab

```
clear all
clc
```

```
ko=2.5
T=5
tau=1.5
```

```
T1=T
T2=6.25*tau
```

```
kp=0.44*(T1+T2)/(ko*T2*tau);
Ti=T1+T2;
Td=T1*T2/(T1+T2);
```

```
[Lp Mp]=pade(tau,12)
Lo=ko*Lp;
Mo=conv([1 0],[T 1]);
Mo=conv(Mo,Mp);
```

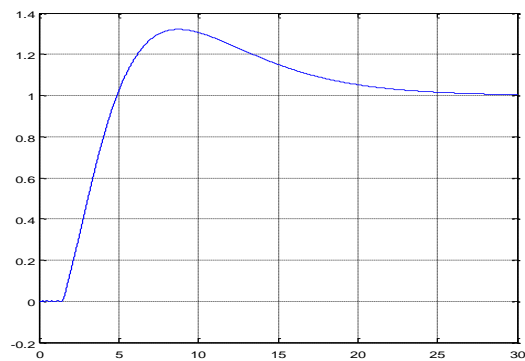
```
Lr=kp*[Ti*Td Ti 1]
Mr=Ti*[1 0]
```

```
Lz=conv(Lr,Lo);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz]
```

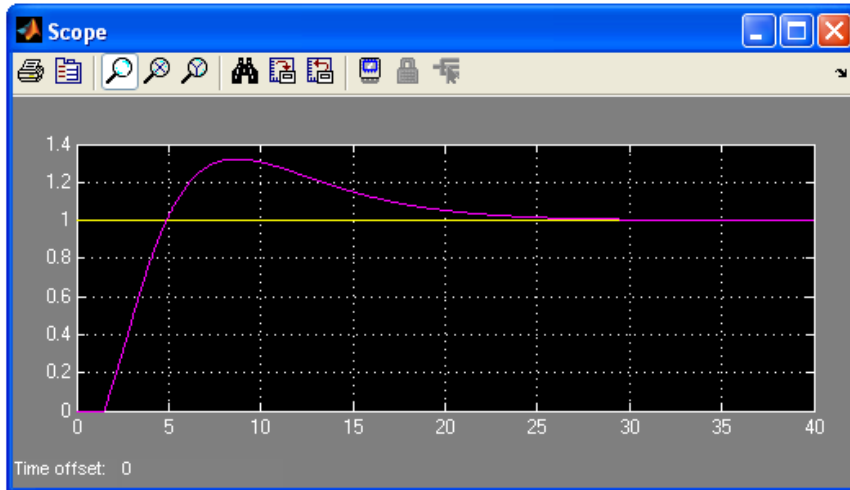
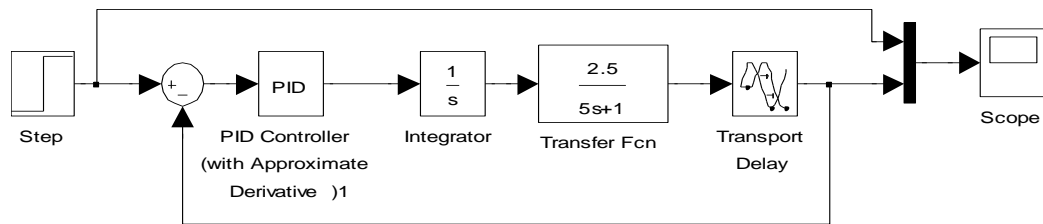
```
t=0:0.01:20*tau;
```

```
y=step(Lz,Mz,t);
plot(t,y);grid
```

```
P = 0.1799
I = 0.0125
D = 0.5867
N = 100
```

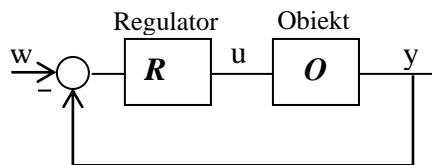


Simulink



BEZPIECZNE NASTAWY – PRZYKŁADY WYPROWADZEŃ

- Układ



OBIEKTY BEZ OPÓŹNIEŃ

1. Inercja

- O: $\frac{k_o}{Ts+1}$, R: PI $\rightarrow k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

$$G_{otw} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{k_o}{Ts+1} = k_p k_o \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot \frac{1}{Ts+1}$$

$T_i = T$ – eliminacja stałej czasowej

$$G_{otw} = \frac{k_p k_o}{T} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{T_{zam} s}, \quad T_{zam} = \frac{T}{k_p k_o}$$

$$G_{zam} = \frac{G_{otw}}{1 + G_{otw}} = \frac{1}{T_{zam} s + 1}$$

- Dane t_r – czas regulacji

$$t_r = 4T_{zam} = 4 \frac{T}{k_p k_o} \quad \rightarrow \quad \underline{k_p = \frac{4T}{t_r k_o}}$$

Wniosek. Im krótszy czas regulacji t_r , tym większe wzmocnienie regulatora k_p .

2. Integrator

- O: $\frac{1}{T_c s}$, R: PI

$$G_{otw} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{1}{T_c s} = \frac{k_p}{T_i T_c} \frac{T_i s + 1}{s^2} = k \frac{T_i s + 1}{s^2}, \quad k = \frac{k_p}{T_i T_c}$$

$$G_{zam} = \frac{G_{otw}}{1 + G_{otw}} = \frac{k(T_i s + 1)}{s^2 + k T_i s + k}$$

$$\Delta = 0: \quad k^2 T_i^2 - 4k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{4}{T_i^2}$$

Pierwiastek (biegun): $s_{1,2} = -\frac{k T_i}{2} = -\frac{2}{T_i}$ dla $\Delta=0$

Stała czasowa jest odwrotnością modułu pierwiastka.

$$t_r = \frac{4}{|s_{1,2}|} = 2T_i$$

- Dane t_r

$$\underline{T_i = \frac{t_r}{2}}, \quad k = \frac{k_p}{T_i T_c} = \frac{4}{T_i^2} \quad \rightarrow \quad \underline{k_p = 4 \frac{T_c}{T_i} = 8 \frac{T_c}{t_r}}$$

Uwaga. Ze względu na $T_i s$ w liczniku G_{zam} odpowiedź skokowa będzie mieć przeregulowanie. Można je zlikwidować rozdzielając regulator PI na I+P lub podając wielkość zadaną w na filtr o stałej czasowej T_i .

3. Podwójna inercja

- O: $\frac{k_o}{(T s + 1)^2}$, R: PID $\rightarrow k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \underset{T_d = \frac{T_i}{4}}{=} k_p \frac{\left(\frac{T_i}{2} s + 1\right)^2}{T_i s}$

$$\frac{T_i}{2} = T \text{ – eliminacja podwójnej stałej czasowej, } \underline{T_i = 2T}$$

$$G_{otw} = k_p \frac{(\frac{T_i}{2}s+1)^2}{T_i s} \cdot \frac{k_o}{(Ts+1)^2} \stackrel{t_i=2T}{=} \frac{k_p k_o}{2T} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{T_{zam} s}, \quad T_{zam} = \frac{2T}{k_p k_o}$$

$$G_{zam} = \frac{1}{T_{zam} s + 1}$$

- Dane t_r

$$t_r = 4T_{zam} = 4 \frac{2T}{k_p k_o} \quad \rightarrow \quad \underline{k_p = \frac{8T}{t_r k_o}}$$

OBIEKTY Z OPÓŹNIENIEM

1. „Czyste” opóźnienie

- Przykład – taśmociąg

$$O: k_o e^{-\tau s} \quad R: I \rightarrow \frac{k_i}{s} \quad (\text{np. } \frac{k_{p,\min}}{T_i s})$$

Aproksymacja Padé I rzędu

$$e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{\frac{\tau}{2}s+1}$$

$$\bullet \quad G_{otw} = \frac{k_i}{s} k_o e^{-\tau s} = k_i k_o \frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{s(\frac{\tau}{2}s+1)}, \quad k = k_i k_o$$

$$G_{zam} = \frac{G_{otw}}{1+G_{otw}} = \frac{k(-\frac{\tau}{2}s+1)}{\frac{\tau}{2}s^2 + (1-k\frac{\tau}{2})s + k}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow (1-k\frac{\tau}{2})^2 - 4k\frac{\tau}{2} = \underbrace{k^2 \frac{\tau^2}{4} - 3k\tau + 1}_{\Delta=9\tau^2-4\frac{\tau^2}{4}=8\tau^2, \quad \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}\tau} = 0 \quad - \text{równanie dla } k$$

$$k = \frac{3\tau - 2\sqrt{2}\tau}{2\frac{\tau^2}{4}} = 2(3-2\sqrt{2})\frac{1}{\tau} \cong 0.34\frac{1}{\tau}, \quad \underline{k_i = 0.34\frac{1}{k_o \tau}}$$

Wyjaśnienie. Drugie rozwiązanie, tj. $k = 2(3 + 2\sqrt{2})\frac{1}{\tau}$, zmienia znak drugiego współczynnika w mianowniku G_{zam} na ujemny, co powoduje, że układ zamknięty byłby niestabilny.

Ze wzoru $k_i = 0.34/(k_o\tau)$ widać, że im większe opóźnienie τ , tym słabsze działanie regulacyjne

$$s_{1,2} = -\frac{1 - k\frac{\tau}{2}}{2\frac{\tau}{2}} = -2(\sqrt{2} - 1)\frac{1}{\tau}, \quad t_r = \frac{4}{|s_{1,2}|} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}\tau \cong 4.83\tau \cong 5\tau$$

Wniosek. Czasu regulacji t_r krótszego niż 5τ nie da się osiągnąć stosując regulację PID.

2. Inercja z opóźnieniem

- O: $\frac{k_o}{Ts+1}e^{-\tau s}$ R: PI

$T_i = T$ – eliminacja stałej czasowej

$$G_{otw} = k_p \frac{T_i s + 1}{T_i s} \frac{k_o}{Ts + 1} e^{-\tau s} \underset{T_i=T}{=} \frac{k_p k_o}{T} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k \frac{-\frac{\tau}{2}s + 1}{s(\frac{\tau}{2}s + 1)}, \quad k = \frac{k_p k_o}{T} \quad \text{– Padé I}$$

Ponieważ G_{otw} ma postać jak wyżej, zatem $k = 0.34\frac{1}{\tau}$, $t_r \cong 5\tau$.

$$\underline{k_p = 0.34 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau}}, \quad \text{np. } k_o = 1, \quad \frac{T}{\tau} = 10 \rightarrow k_p = 3.4$$

3. Podwójna inercja z opóźnieniem

- O: $\frac{k_o}{(Ts+1)^2}e^{-\tau s}$, R: PID $\rightarrow k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \underset{T_d=\frac{T_i}{4}}{=} k_p \frac{(\frac{T_i}{2}s + 1)^2}{T_i s}$

$T_i = 2T$ – eliminacja stałych czasowych

$$G_{otw} = k_p \frac{(\frac{T_i}{2}s + 1)^2}{T_i s} \frac{k_o}{(Ts + 1)^2} e^{-\tau s} \underset{T_i=2T}{=} \frac{k_p k_o}{2T} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s} \cong k \frac{-\frac{\tau}{2}s + 1}{s(\frac{\tau}{2}s + 1)}, \quad k = \frac{k_p k_o}{2T}$$

- Jak poprzednio: $k = 0.34/\tau$, $t_r = 5\tau$

Zatem

$$k_p = 0.68 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau} \cong \underline{0.7 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau}}$$

PRZYKŁAD I – OBIEKT „PROSTY”

1. Obiekt

- Obiekt „prawdziwy” i aproksymacja (zob. wykład *Identyfikacja*)

$$\frac{1}{(s+1)(0.1s+1)^2} \rightarrow \frac{1}{s+1} e^{-0.17s}$$

$$T = 1, \quad \tau = 0.17, \quad k_o = 1$$

W obiektach „prostych” opóźnienie τ jest wyraźnie mniejsze od stałej czasowej T .

2. Regulator PI

- Nastawy

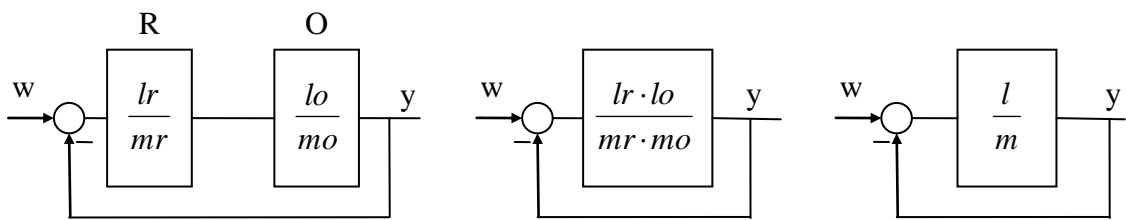
$$T_i = T = 1, \quad k_p = 0.34 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau} = 0.34 \frac{1}{0.18} = 1.88 \cong 1.9$$

$$\text{PI: } 1.9 \frac{s+1}{s}$$

- Czas regulacji – $t_r = 5\tau = 5 \cdot 0.18 \cong 1$

3. Matlab

- Odpowiedź na wielkość zadaną



$$l = lr \cdot lo, \quad m = mr \cdot mo \quad \text{conv}()$$

- $lr = 1.9 * [1 \ 1]; \quad mr = [1 \ 0];$
 $lo = 1; \quad mo = \text{conv}([1 \ 1], \text{conv}([0.1 \ 1], [0.1 \ 1]));$ – obiekt „prawdziwy”

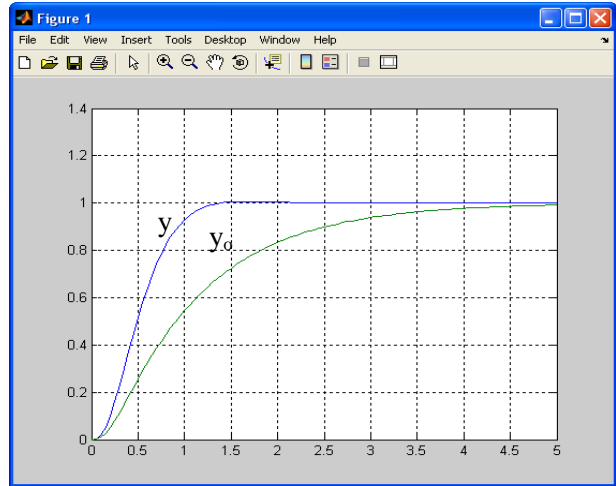
```

lo=[0 0 0 lo]; – długość jak mo
l=conv(lo, lr); m=conv(mo, mr);
t=0:0.05:5;
y=step(l, l+m, t); – układ zamknięty
yo=step(lo, mo, t); – obiekt
plot(t, y, t, yo), grid
max(y)

```

p% ≅ 0.7%

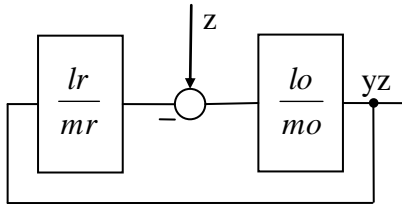
Wniosek. Układ zamknięty szybko nadąża za wielkością zadaną.



ODPOWIEDŹ NA ZAKŁÓCENIE

1. Transmitancja zakłóceniewa

- Układ



$$G_z = \frac{\frac{lo}{mo}}{1 + \frac{lr}{mr} \cdot \frac{lo}{mo}} = \frac{lo \cdot mr}{\underbrace{mr \cdot mo + lr \cdot lo}_{l+m}}$$

2. Matlab

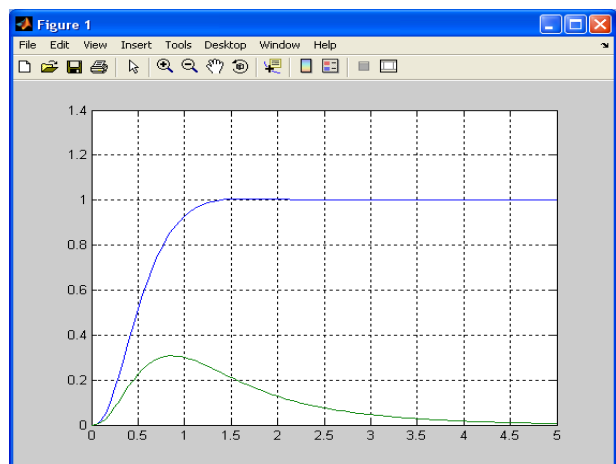
```

yz=step(conv(lo, mr), l+m, t);
plot(t, y, t, yz), grid
max(yz)

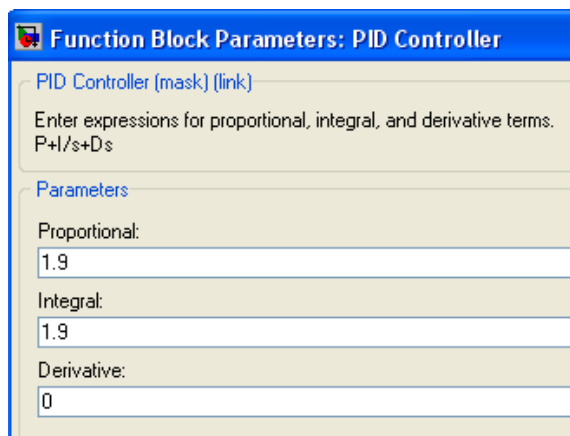
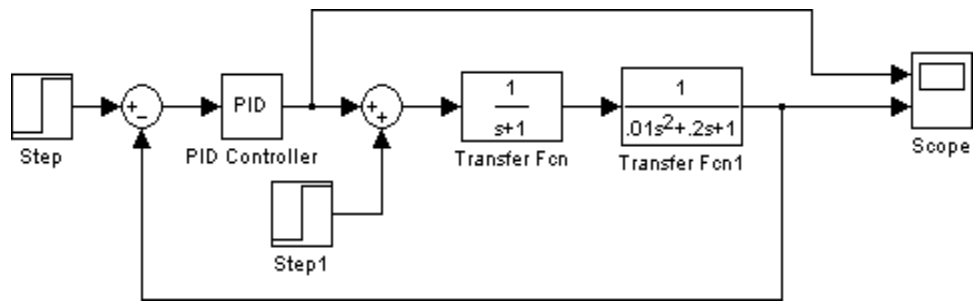
```

0.30

Wniosek. Zakłócenie jest silnie tłumione.



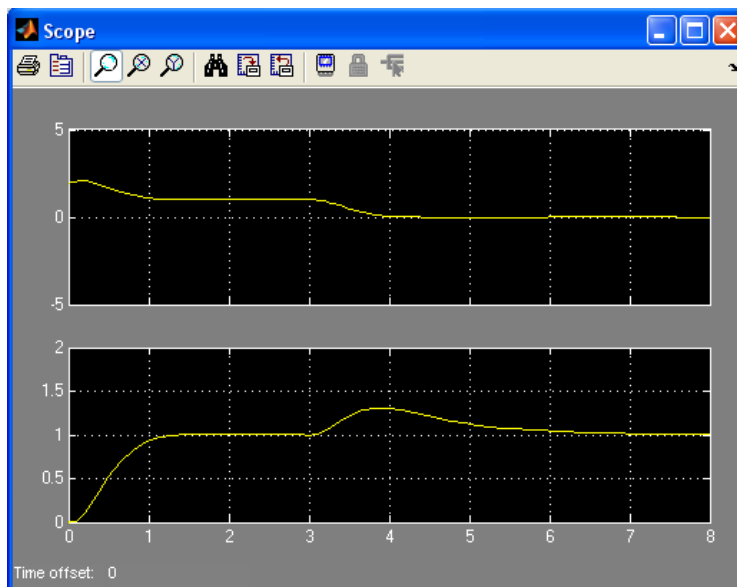
3. Simulink



$$P=k_p=1.9$$

$$I=k_p/T_i=1.9$$

$$D=k_p T_d=0$$



Step: S.t. - 0 F.v. - 1 Step1: S.t. - 3, F.v. - 1

PRZYKŁAD II – OBIEKT „TRUDNY”

1. Obiekt

- Obiekt „prawdziwy” i aproksymacja (zob. *Identyfikacja*)

$$\frac{1}{(s+1)^5} \rightarrow \frac{1}{(1.69s+1)^2} e^{-1.53s}$$

$$T=1.69, \quad \tau=1.53, \quad k_o=1$$

Obiekty „trudne”, to obiekty z dominującym opóźnieniem. W praktyce spotyka się je rzadko.

2. Regulator PID

$$\bullet \quad k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_d s + 1} \right) = k_p \frac{T_i T_d \left(1 + \frac{1}{D} \right) s^2 + \left(T_i + \frac{T_d}{D} \right) s + 1}{T_i s \left(\frac{T_d}{D} s + 1 \right)}$$

- Nastawy

$$T_i = 2T = 2 \cdot 1.69, \quad T_d = \frac{T_i}{4}, \quad k_p = 0.7 \frac{1}{k_o} \cdot \frac{T}{\tau} = 0.7 \frac{1.69}{1.53} \cong 0.77$$

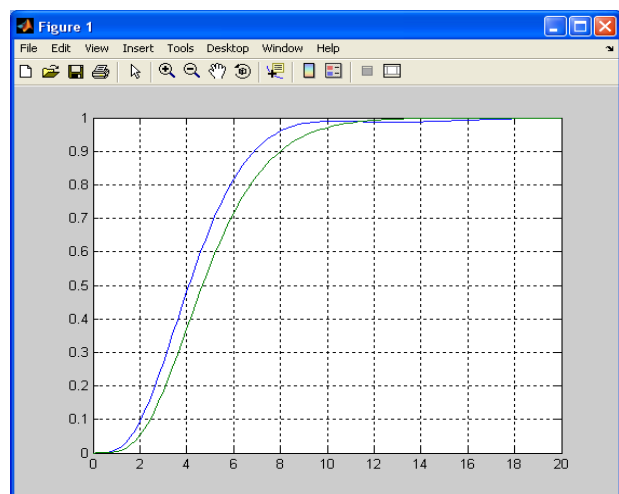
$$t_r = 5\tau = 5 \cdot 1.53 = 7.65$$

3. Matlab

- Odpowiedź na wielkość zadaną

```
Ti=2*1.69; Td=Ti/4; kp=0.77; D=5;
lr=kp*[Ti*Td*(1+1/D) (Ti+Td/D)
1];
mr=[Ti*Td/D Ti 0];
```

```
lo=1; mo=conv([1 1], [1 1]);
mo=conv(mo, mo), mo=conv([1 1],
mo);
lo=[0 0 0 0 0 lo];
l=conv(lr, lo); m=conv(mr, mo);
t=0: 0.2:20;
y=step(l, l+m, t);
yo=step(lo, mo, t);
plot(t, y, t, yo), grid
```

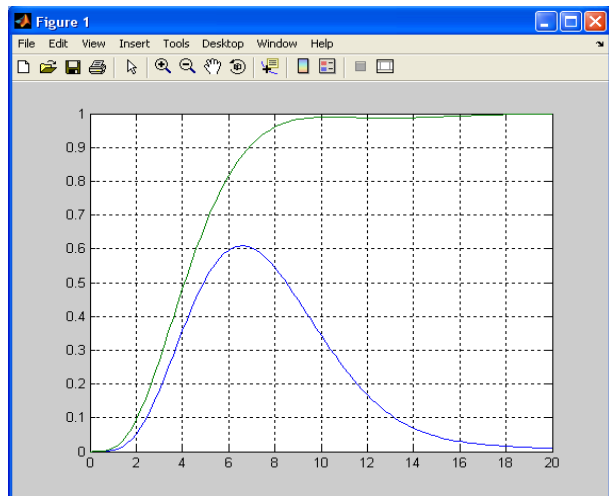


Wniosek. Oszacowanie $t_r = 7.65$ jest miarodajne.

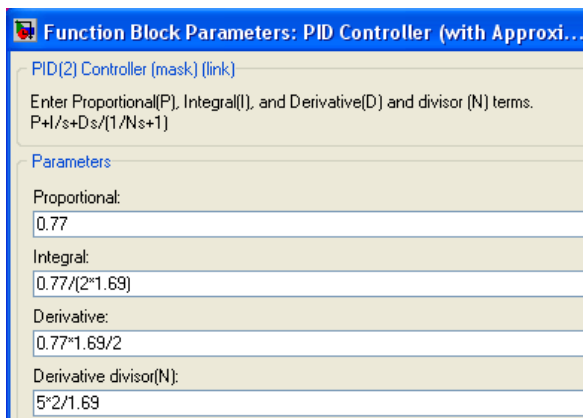
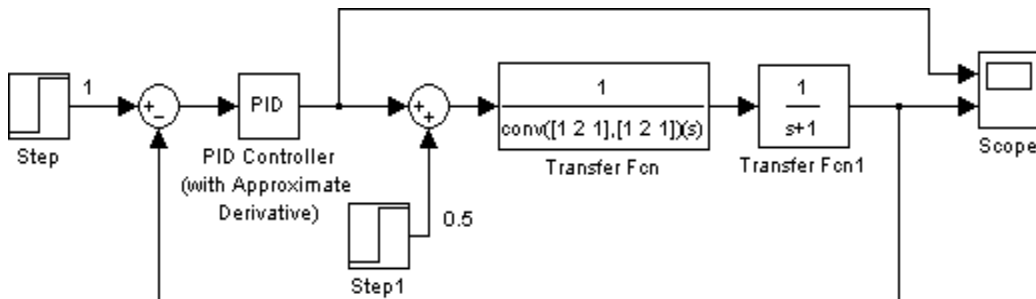
- Odpowiedź na zakłócenie

```
yz=step(conv(lo, mr), l+m, t);
plot(t, yz, t, y), grid
max(yz)
0.60
```

Wniosek. Układ zamknięty kompensuje wpływ stałego, utrzymującego się zakłócenia.



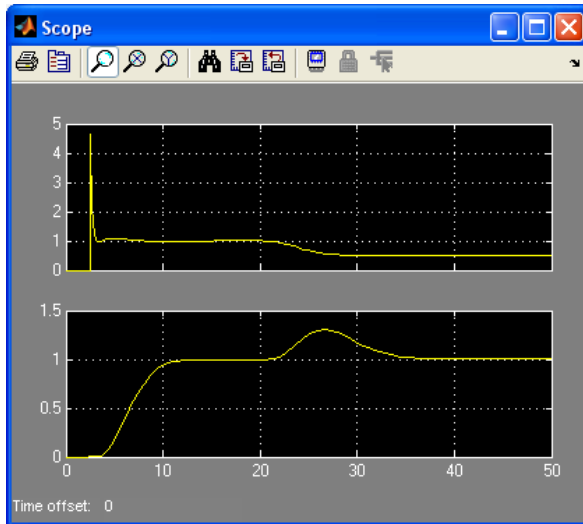
4. Simulink



$$\frac{D_s s}{\frac{1}{N} s + 1} \quad \text{odpowiada} \quad \frac{k_p T_d s}{\frac{T_d}{D} s + 1}$$

$$\text{Zatem } N = \frac{D}{T_d}.$$

Przyjęto $D = 5$ (jak Siemens).



Step: $S.t. - 2.5, F.v. - 1$ Step1: $S.t. - 20, F.v. - 0.5$ (dwukrotnie mniej)

PORADNIK INŻYNIERA – AUTOMATYKA

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa. 1975

1. Nastawy regulatorów dla obiektu $\frac{k_o}{Ts+1} e^{-\tau s}$

- Tabela nastaw (fragment)
Przeregulowanie $\cong 0$, minimalny czas regulacji

Regulator	$k_p k_o \frac{\tau}{T}$	$\frac{T_i}{\tau}$	$\frac{T_d}{\tau}$
PI	0.6	$0.8 + 0.5 \frac{T}{\tau}$	–
PID	0.95	2.4	0.4

- Obiekt „trudny” – aproksymacja transmitancją $\frac{k_o}{Ts+1} e^{-\tau s}$

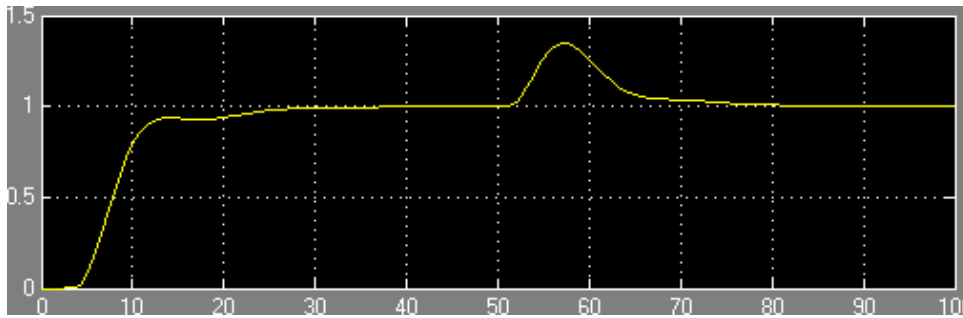
$t_{10} = 3.15, t_{90} = 9.3$ – zob. Identyfikacja obiektów

$$T = \frac{t_{90} - t_{10}}{2.2} = 2.795 \cong 2.8, \quad \tau = t_{10} - 0.1T = 2.87 \cong 2.9.$$

Obiekt dla doboru nastaw – $\frac{1}{2.8s+1} e^{-2.9s}$

- Regulator PI

$$k_p = 0.6 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau} = 0.6 \frac{2.8}{2.9} = 0.58, \quad T_i = 0.5T + 0.8\tau = 3.72$$

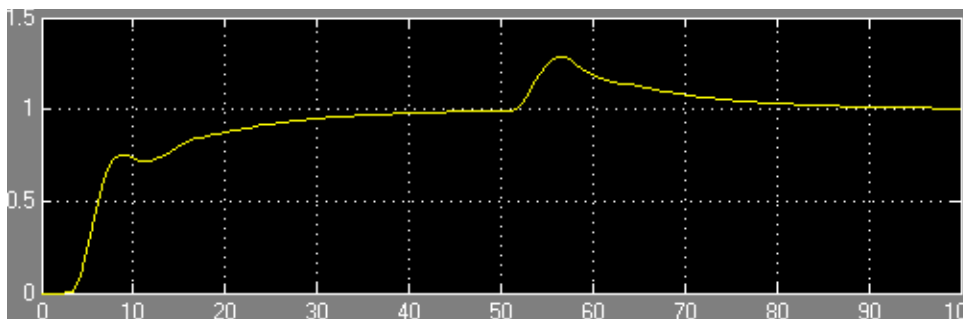


P=0.58
I=0.58/3.72
D=0

Porównanie. Przebiegi wyglądają nieco gorzej niż poprzednio.

- Regulator PID

$$k_p = 0.95 \frac{1}{k_o} \frac{T}{\tau} = 0.92, \quad T_i = 2.4\tau = 7.0, \quad T_d = 0.4\tau = 1.2$$



P=0.92
I=0.92/7.0
D=0.92·1.2
N=5/(1.2)

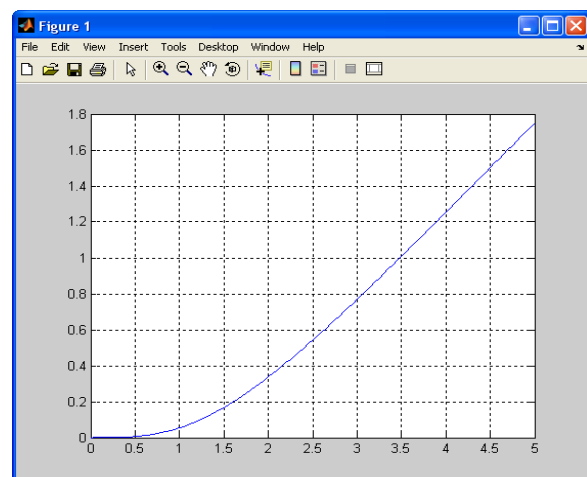
Porównanie. Czas regulacji dłuższy niż PI (trochę lepsze tłumienie zakłóceń).

2. Obiekt całkujący $\frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$

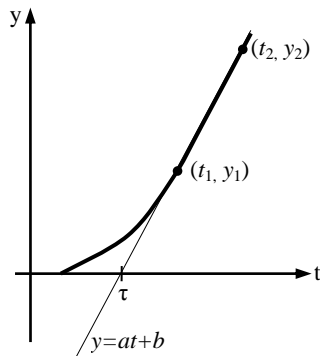
- Przykład $\frac{1}{2s(0.5s+1)^3}$

Matlab

```
t=0:0.05:5;
yo=step(1, 2* [.125 .75 1.5 1 0], t);
plot(t, yo), grid
```



- Aproksymacja obiektu transmitancją $\frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$



Matlab
[t' yo]
...
(t1, y1): 3.0 0.7704
...
(t2, y2): 5.0 1.7508
y=at+b
0.7704 = a·3+b
1.7508 = a·5+b → a = 0.9804, b = -0.7056
 $T_c = \frac{1}{a} \cong 2.04$
 $\tau: 0 = 0.9804 \cdot \tau - 0.7056 \rightarrow \tau = 1.44$

Obiekt dla doboru nastaw – $\frac{1}{2.04s} e^{-1.44s}$

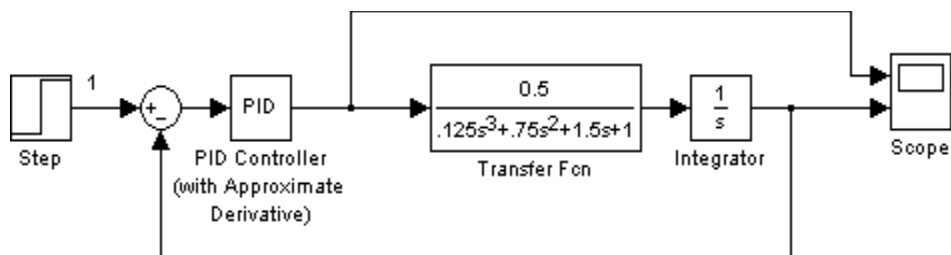
3. Nastawy regulatorów dla obiektu $\frac{1}{T_c s} e^{-\tau s}$

- Przeręglowanie $\cong 0$, minimum t_r (według Poradnika)

Regulator	$k_p \frac{\tau}{T_c}$	$\frac{T_i}{\tau}$	$\frac{T_d}{\tau}$
PI	0.46	5.75	–
PID	0.65	5.0	0.23

Tabele nastaw regulatorów PID podane w Poradniku Inżyniera – Automatyka nie są jedynymi. W literaturze anglosaskiej spotyka się dość podobne tabele opracowane przez Cohena i Coona.

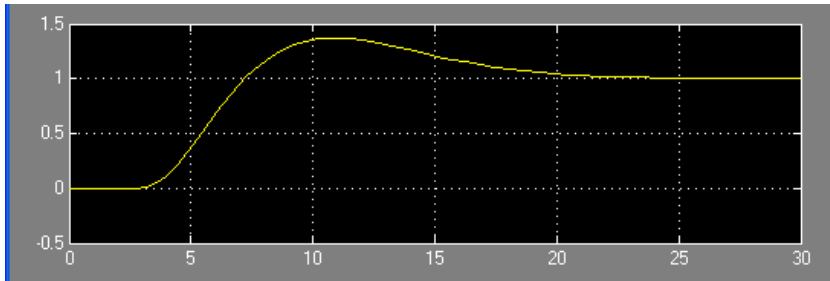
- Simulink



Step: S.t. – 2.5, F.v. – 1

- Regulator PI

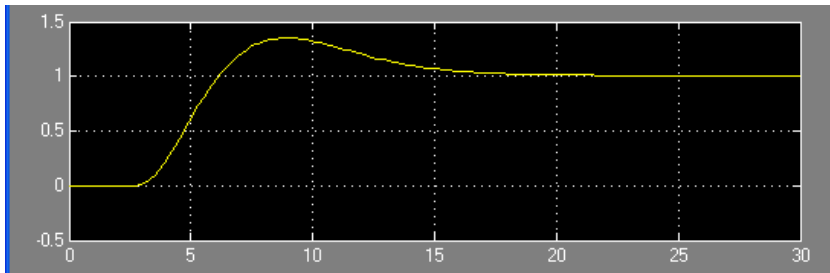
$$k_p = 0.46 \frac{T_c}{\tau} = 0.46 \frac{2 \cdot 0.4}{1.44} = 0.65, \quad T_i = 5.75 \cdot \tau = 5.75 \cdot 1.44 = 8.28$$



P=0.65
I=0.65/8.28

- Regulator PID

$$k_p = 0.65 \frac{T_c}{\tau} = 0.92, \quad T_i = 5\tau = 7.2, \quad T_d = 0.23 \cdot \tau = 0.33$$



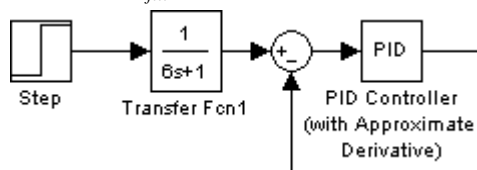
P=0.92
I=0.92/7.2
D=0.30
N=5/0.33

Porównanie. Przebieg dla regulatora PID wygląda korzystniej.

4. Eliminacja przeregulowania przez filtrację wielkości zadanej

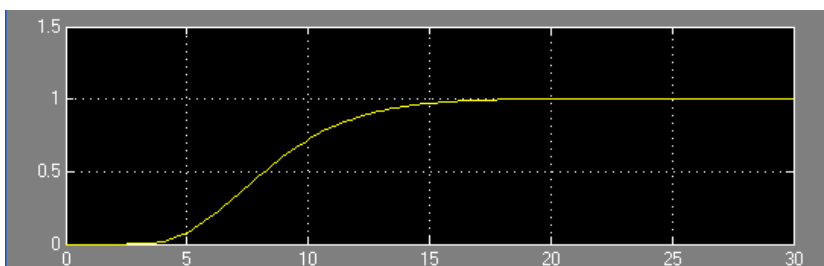
- Stałą czasową filtru wybiera się eksperymentalnie w przedziale $(\frac{T_i}{2} \dots T_i)$

Przyjęto $T_{filtr} = 6$.



P, I, D, N – jak poprzednio

- Odpowiedź skokowa



Uwaga. Czas regulacji szacuje się jako $t_r \cong 10\tau$.

HANDBOOK OF PI AND PID CONTROLLER TUNING RULES

3rd Edition, Aidan O'Dwyer, Imperial College Press 2009

Organisation of the Tuning Rules

The tuning rules are organised in tabular form. Within each table, the tuning rules are classified further; the main subdivisions made are as follows:

- (i) Tuning rules based on a measured step response (also called process reaction curve methods).
- (ii) Tuning rules based on minimising an appropriate performance criterion, either for optimum regulator or optimum servo action.
- (iii) Tuning rules that give a specified closed loop response (direct synthesis tuning rules). Such rules may be defined by specifying the desired poles of the closed loop response, for instance, though more generally, the desired closed loop transfer function may be specified. The definition may be expanded to cover techniques that allow the achievement of a specified gain margin and/or phase margin.
- (iv) Robust tuning rules, with an explicit robust stability and robust performance criterion built into the design process.
- (v) Tuning rules based on recording appropriate parameters at the ultimate frequency (also called ultimate cycling methods).
- (vi) Other tuning rules, such as tuning rules that depend on the proportional gain required to achieve a quarter decay ratio or to achieve magnitude and frequency information at a particular phase lag.

Wybrane wskaźniki jakości (performance criterion)

$$IE = \text{Integral of Error} = \int_0^{\infty} e(t) dt$$

$$IAE = \text{Integral of Absolute Error} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

$$ISE = \text{Integral of Squared Error} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

$$ISTES = \text{Integral of Squared Time multiplied by Error, all to be Squared} = \int_0^{\infty} [t^2 e(t)]^2 dt$$

$$ISTSE = \text{Integral of Squared Time multiplied by Squared Error} \\ = \int_0^{\infty} t^2 e^2(t) dt$$

$$ITSE = \text{Integral of Time multiplied by Squared Error} = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt$$

$$ITAE = \text{Integral of Time multiplied by Absolute Error} = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$$

Przykładowe tabele nastaw

$$3.3.1 \text{ Ideal PI controller } G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

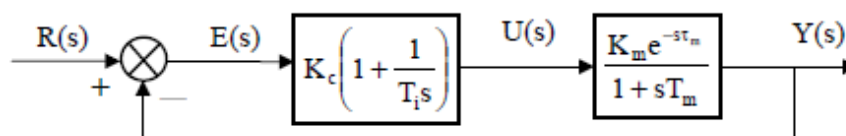


Table 9: PI controller tuning rules – FOLPD model $G_m(s) = \frac{K_m e^{-s\tau_m}}{1 + sT_m}$

Rule	K_c	T_i	Comment				
Hazebroek and Van der Waerden (1950) – continued.	$\frac{T_m}{K_m \tau_m} \left(0.5 \frac{\tau_m}{T_m} + 1 \right)$	$\frac{\tau_m^2}{1.6\tau_m - 1.2T_m}$	$\tau_m/T_m > 3.5$				
Oppelt (1951). <i>Model: Method 2</i>	$^3 K_c$	$1.66\tau_m$	$\tau_m \gg T_m$				
		$3.32\tau_m$	$\tau_m \ll T_m$				
Moros (1999). <i>Model: Method 1</i>	$0.8T_m/K_m \tau_m$	$3\tau_m$	Attributed to Oppelt.				
	$0.91T_m/K_m \tau_m$	$3.3\tau_m$	Attributed to Rosenberg.				
Chien <i>et al.</i> (1952). <i>Model: Method 2;</i> $0.1 < \tau_m/T_m < 1.0$.	Regulator						
	$0.6T_m/K_m \tau_m$	$4\tau_m$	0% overshoot.				
	$0.7T_m/K_m \tau_m$	$2.33\tau_m$	20% overshoot.				
	Servo						
	$0.35T_m/K_m \tau_m$	$1.17T_m$	0% overshoot.				
	$0.6T_m/K_m \tau_m$	T_m	20% overshoot.				
Reswick (1956). <i>Model: Method 2;</i> K_c, T_i deduced from graphs; $\tau_m/T_m = 6.25$.	Regulator						
	$0.20/K_m$	$0.20\tau_m$	0% overshoot.				
	$0.30/K_m$	$0.22\tau_m$	20% overshoot.				
	Servo						
	$0.15/K_m$	$0.16\tau_m$	0% overshoot.				
	$0.20/K_m$	$0.14\tau_m$	20% overshoot.				
Cohen and Coon (1953). <i>Model: Method 2</i>	$\frac{1}{K_m} \left(0.9 \frac{T_m}{\tau_m} + 0.083 \right)$	$^4 T_i$	Quarter decay ratio; $0 < \tau_m/T_m \leq 1.0$.				
Two constraints method – Wolfe (1951). <i>Model: Method 4</i>	$x_1 T_m / K_m \tau_m$		$x_2 \tau_m$	Decay ratio is as small as possible; minimum error integral (regulator mode).			
	Coefficient values:						
	$\frac{\tau_m}{T_m}$	x_1	x_2		$\frac{\tau_m}{T_m}$	x_1	x_2
	0.2	4.4	3.23		1.0	0.78	1.28
	0.5	1.8	2.27		5.0	0.30	0.53

3.3.2 Ideal PID controller $G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$

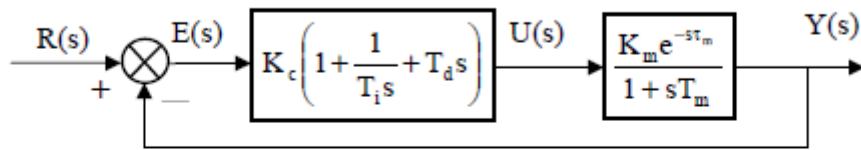


Table 10: PID controller tuning rules – FOLPD model $G_m(s) = \frac{K_m e^{-s\tau_m}}{1 + sT_m}$

Rule	K_c	T_i	T_d	Comment
Process reaction				
Callender <i>et al.</i> (1935/6). <i>Model: Method 1</i>	$^1 \frac{1.066}{K_m \tau_m}$	$1.418\tau_m$	$0.353\tau_m$ or $0.47\tau_m$	$\frac{\tau_m}{T_m} = 0.3$
Ziegler and Nichols (1942). <i>Model: Method 2</i>	$\frac{x_1 T_m}{K_m \tau_m}$	$2\tau_m$	$0.5\tau_m$	$1.2 \leq x_1 \leq 2$; quarter decay ratio.
Chien <i>et al.</i> (1952) – regulator. <i>Model: Method 2</i>	$\frac{0.95T_m}{K_m \tau_m}$	$2.38\tau_m$	$0.42\tau_m$	0% overshoot; $0.1 < \tau_m/T_m < 1$.
	$\frac{1.2T_m}{K_m \tau_m}$	$2\tau_m$	$0.42\tau_m$	20% overshoot; $0.1 < \tau_m/T_m < 1$.
Chien <i>et al.</i> (1952) – servo. <i>Model: Method 2</i>	$\frac{0.6T_m}{K_m \tau_m}$	T_m	$0.5\tau_m$	0% overshoot; $0.1 < \tau_m/T_m < 1$.
	$\frac{0.95T_m}{K_m \tau_m}$	$1.36T_m$	$0.47\tau_m$	20% overshoot; $0.1 < \tau_m/T_m < 1$.
Cohen and Coon (1953). <i>Model: Method 2</i>	$^2 K_c$	T_i	$\frac{0.37\tau_m}{1 + 0.19(\tau_m/T_m)}$	Quarter decay ratio; $0.1 < \tau_m/T_m \leq 1$.

¹ Decay ratio = 0.043; period of decaying oscillation = $6.28\tau_m$.

$$^2 K_c = \frac{1}{K_m} \left(1.35 \frac{T_m}{\tau_m} + 0.25 \right), T_i = T_m \left(\frac{2.5(\tau_m/T_m) + 0.46(\tau_m/T_m)^2}{1 + 0.61(\tau_m/T_m)} \right).$$

3.3.4 Controller with filtered derivative $G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + s \frac{T_d}{N}} \right)$

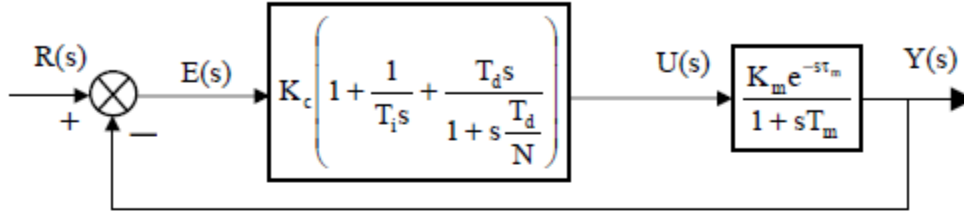


Table 12: PID controller tuning rules – FOLPD model $G_m(s) = \frac{K_m e^{-s\tau_m}}{1 + s T_m}$

Rule	K_c	T_i	T_d	Comment
Minimum performance index: regulator tuning				
Minimum IAE – Alfaro Ruiz (2005a).	$^1 K_c$	T_i	T_d	
	<i>Model: Method 10; N = 10.</i>			
Minimum IAE – Arrieta Orozco (2003).	$^2 K_c$	T_i	T_d	
	<i>Model: Method 10; N = 10. Also given by Arrieta Orozco and Alfaro Ruiz (2003).</i>			

$$^1 K_c = \frac{1}{K_m} \left[0.2068 + 1.1597 \left(\frac{T_m}{\tau_m} \right)^{1.0158} \right], \quad T_i = T_m \left[-0.2228 + 1.3009 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.5022} \right],$$

$$T_d = 0.3953 T_m \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.8469}, \quad 0.05 \leq \frac{\tau_m}{T_m} \leq 2.0.$$

$$^2 K_c = \frac{1}{K_m} \left[0.1050 + 1.2432 \left(\frac{T_m}{\tau_m} \right)^{0.9946} \right], \quad T_i = T_m \left[-0.2512 + 1.3581 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.4796} \right],$$

$$T_d = T_m \left[-0.0003 + 0.3838 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.9479} \right], \quad 0.1 \leq \frac{\tau_m}{T_m} \leq 1.2.$$

Rule	K_c	T_i	T_d	Comment
Minimum ITAE – Arrieta Orozco (2003).	${}^3 K_c$	T_i	T_d	$0.1 \leq \frac{\tau_m}{T_m} \leq 1.2$
	<i>Model: Method 10; N = 10. Also given by Arrieta Orozco and Alfaro Ruiz (2003).</i>			
Minimum performance index: servo tuning				
Tavakoli and Tavakoli (2003). <i>Model: Method 1;</i> $0.1 \leq \frac{\tau_m}{T_m} \leq 2;$ $N = 10$	${}^4 K_c$	T_i	$0.0111T_m$	Minimum IAE.
	${}^5 K_c$	T_i		Minimum ISE.
	$\frac{1}{K_m} \left(\frac{0.8}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.1} \right)$	$\tau_m \left(0.3 + \frac{T_m}{\tau_m} \right)$	$\tau_m \left(\frac{0.06}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.04} \right)$	Minimum ITAE.

$${}^3 K_c = \frac{1}{K_m} \left[0.1230 + 1.1891 \left(\frac{T_m}{\tau_m} \right)^{1.0191} \right], \quad T_i = T_m \left[-0.3173 + 1.4489 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.4440} \right],$$

$$T_d = T_m \left[0.0053 + 0.3695 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.9286} \right] \quad (\text{Arrieta Orozco, 2003});$$

$$T_d = T_m \left[-0.0053 + 0.3695 \left(\frac{\tau_m}{T_m} \right)^{0.9286} \right] \quad (\text{Arrieta Orozco and Alfaro Ruiz, 2003}).$$

$${}^4 K_c = \frac{1}{K_m} \left(\frac{1}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.2} \right), \quad T_i = \tau_m^2 \left(\frac{0.3 \frac{\tau_m}{T_m} + 1.2}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.08} \right) \left(\frac{0.06}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.04} \right).$$

$${}^5 K_c = \frac{1}{K_m} \left(\frac{0.3 \frac{\tau_m}{T_m} + 0.75}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.05} \right), \quad T_i = 2.4 \tau_m \left(\frac{1}{\frac{\tau_m}{T_m} + 0.4} \right).$$

Przykład $\frac{K_m}{T_m s + 1} e^{-\tau_m s}$ dobór nastaw dla regulatora PI zgodnie z punktem 3.3.1 metodą *Chien et al. (1952)* – Matlab

```
%Regulator vs Servo - na podstawie Handbook - Przeregulowanie 0%
```

```
clear all
clc
```

```
%Obiekt
Km=2
Tm=2
taum=1
```

```
Lo=Km
Mo=[Tm 1]
```

```
[Ip Mp]=pade(taum,12);
```

```

Lo=conv(Lo,Lp);
Mo=conv(Mo,Mp);

%=====
%PI - 1
%=====

%Chien et al. (1952) => Regulator - 0% OVS
Kc=0.6*Tm/(Km*taum);
Ti=4*taum;

%Simulink
PR=Kc
IR=Kc/Ti

%Transmitancja PI
Lr=Kc*[Ti 1]
Mr=[Ti 0]

%Transmitancja układu zamkniętego
Lz=conv(Lr,L0);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz];

%Symulacja
t=0:0.01:20*Tm+taum;

y1=step(Lz,Mz,t);

%=====
%PI - 2
%=====

%Chien et al. (1952) => Servo - 0% OVS
Kc=0.35*Tm/(Km*taum);
Ti=1.17*taum;

%Simulink
PS=Kc
IS=Kc/Ti

%Transmitancja PI
Lr=Kc*[Ti 1]
Mr=[Ti 0]

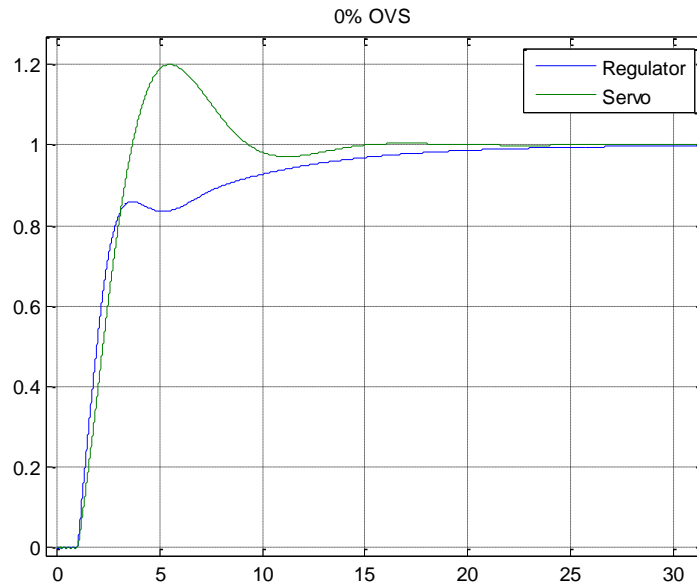
%Transmitancja układu zamkniętego
Lz=conv(Lr,L0);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz];

%Symulacja
t=0:0.01:20*Tm+taum;

y2=step(Lz,Mz,t);

plot(t,y1,t,y2);grid
legend('Regulator','Servo');
title('0% OVS');

```

%Regulator vs Servo - na podstawie Handbook - Przeregulowanie 20%

```
clear all
clc
```

```
%Obiekt
Km=2
Tm=2
taum=1
```

```
Lo=Km
Mo=[Tm 1]
```

```
[Lp Mp]=pade(taum,12);
```

```
Lo=conv(Lo,Lp);
Mo=conv(Mo,Mp);
```

```
=====
%PI - 1
=====
```

```
%Chien et al. (1952) => Regulator - 20% OVS
Kc=0.7*Tm/(Km*taum);
Ti=2.33*taum;
```

```
%Simulink
PR=Kc
IR=Kc/Ti
```

```
%Transmitancja PI
```

```
Lr=Kc*[Ti 1]
Mr=[Ti 0]
```

```
%Transmitancja układu zamkniętego
```

```
Lz=conv(Lr,Lo);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz];
```

```
%Symulacja
t=0:0.01:7*Tm+taum;
```

```
y1=step(Lz,Mz,t);
```

```
=====
%PI - 2
=====
```

```

%Chien et al. (1952) => Servo - 20% OVS
Kc=0.6*Tm/(Km*taum);
Ti=Tm;

%Simulink
PS=Kc
IS=Kc/Ti

%Transmitancja PI

Lr=Kc*[Ti 1]
Mr=[Ti 0]

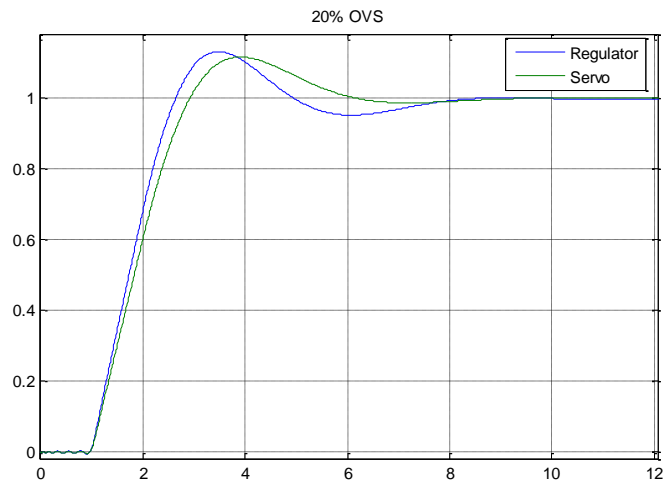
%Transmitancja układu zamkniętego
Lz=conv(Lr,Lo);
Mz=conv(Mr,Mo)+[0 Lz];

%Symulacja
t=0:0.01:7*Tm+taum;

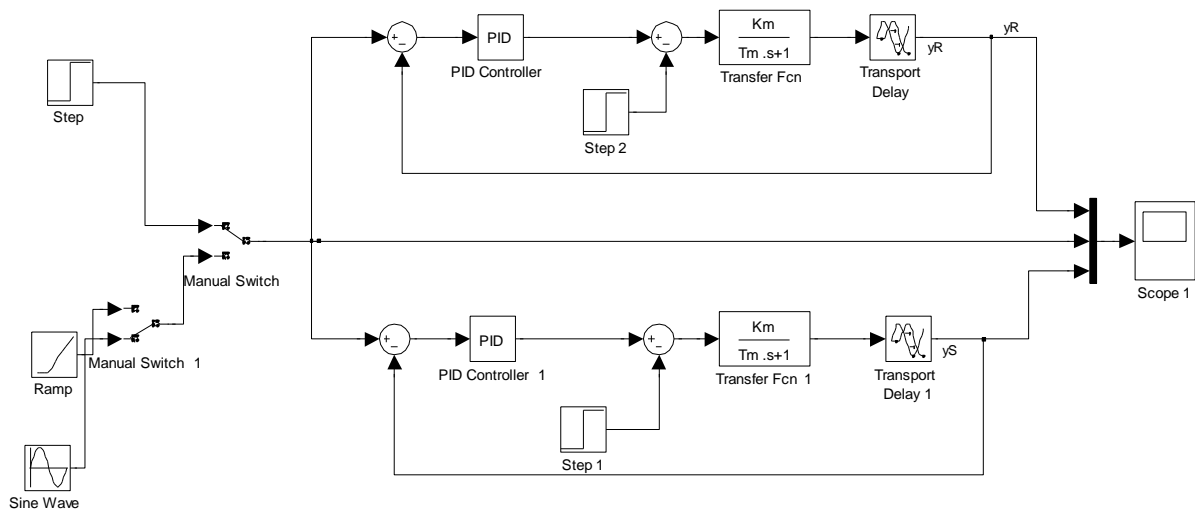
y2=step(Lz,Mz,t);

plot(t,y1,t,y2);grid
legend('Regulator','Servo');
title('0% OVS');

```



Simulink



Wyniki uzyskane za pomocą Matlab i Simulink są identyczne.