

## IDENTYFIKACJA OBIEKTÓW

Odpowiedzi skokowe. Aproksymacje – przykład I. Aproksymacja – przykład II.

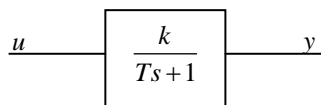
### ODPOWIEDZI SKOKOWE

#### 1. Skok sterowania

Sygnał sterujący jest zmieniany skokowo w punkcie pracy obiektu.

$$u(t) = U \cdot 1(t) \quad - \text{ np. } U=0.1 - 10\% \text{ zakresu}$$

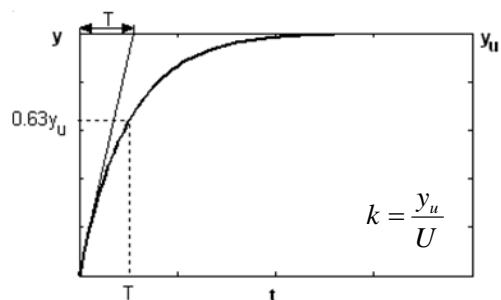
#### 2. Inercja pierwszego rzędu



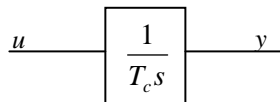
$$y(t) = kU \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$y(t \rightarrow \infty) = y_u = kU$$

$$y(t=T) = kU(1 - e^{-1}) \cong 0.63kU = 0.63y_u$$

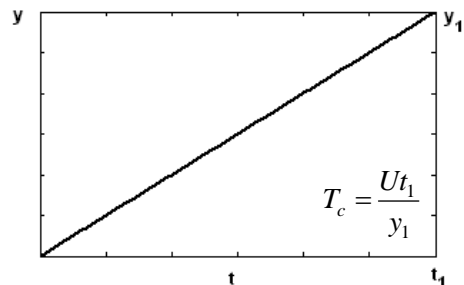


#### 3. Integrator

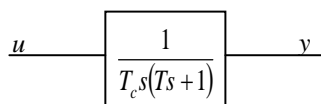


$$y(t) = \frac{1}{T_c} U t \quad T_c - \text{ czas całkowania}$$

$$y_1 = \frac{1}{T_c} U t_1$$



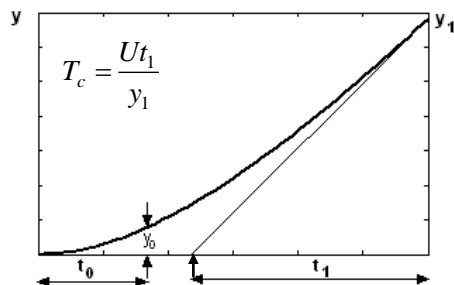
#### 4. Integrator z inercją



$$y(t) = \frac{1}{T_c} U \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right]$$

$(t_0, y_0)$  - dowolny punkt na łuku

$$y_0 = \frac{1}{T_c} U \left[ t_0 - T(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}) \right]$$



$$T_c \frac{y_0}{U} = t_0 - T(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}) \quad \rightarrow \quad \frac{T_c y_0}{U t_0} = c, \quad \frac{t_0}{T} = x$$

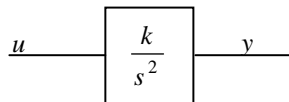
$$c = 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

Dla konkretnego  $c$  należy rozwiązać to równanie i obliczyć  $x$ . Wtedy  $T = \frac{t_0}{x}$ .

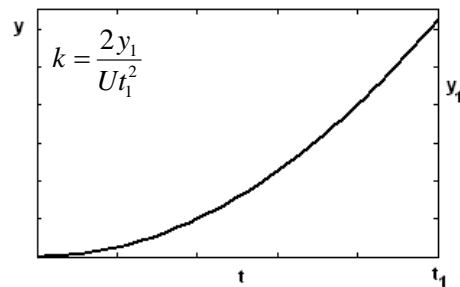
Przykładowe wyniki

<b>c</b>	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.5	0.55	0.60
<b>x</b>	0.103	0.215	0.334	0.464	0.606	0.761	0.934	1.126	1.344	1.593	1.884	2.231

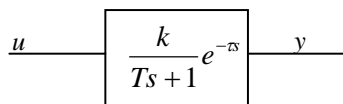
## 5. Podwójny integrator



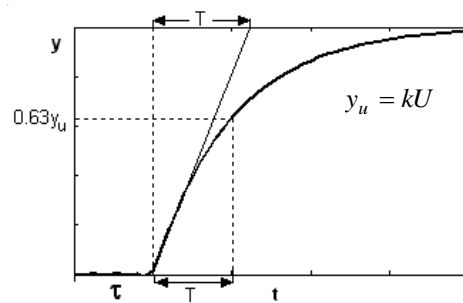
$$y(t) = kU \frac{t^2}{2}$$



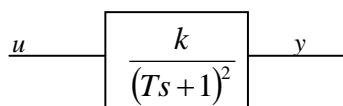
## 6. Inercja z opóźnieniem



$\tau$  odczytywane z wykresu



## 7. Podwójna inercja



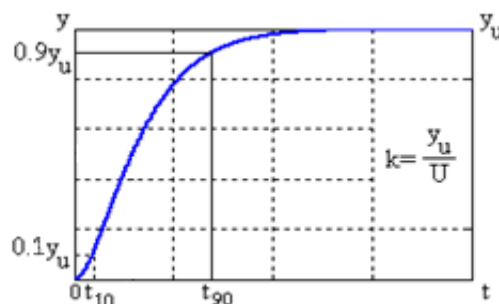
$$y(t) = kU \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right]$$

Czasy  $t_{10}$ ,  $t_{90}$

$$0.1 = 1 - \left( 1 + \frac{t_{10}}{T} \right) e^{-\frac{t_{10}}{T}} \rightarrow t_{10} = 0.53T$$

$$0.9 = 1 - \left( 1 + \frac{t_{90}}{T} \right) e^{-\frac{t_{90}}{T}} \rightarrow t_{90} = 3.89T$$

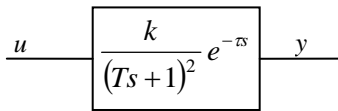
$$t_{90} - t_{10} = 3.36T$$



Matlab  
 $x=0:0.01:4$ ;  $t/T$   
 $[x', (1-(1+x).*\exp(-x))]$

$$T \cong \frac{t_{90} - t_{10}}{3.3}$$

### 8. Podwójna inercja z opóźnieniem



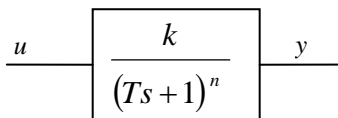
$$T = \frac{t_{90} - t_{10}}{3.3}$$

$$\tau = t_{10} - 0.53T$$



*Uwaga.* Opóźnienie  $\tau$  nie jest wprost odczytywane z przebiegu, ale obliczane z podstawie  $t_{10}$  i  $t_{90}$ . Gdyby obliczone  $\tau$  okazało się ujemne, to należy przyjąć  $\tau = 0$ .

### 9. Wielokrotna inercja

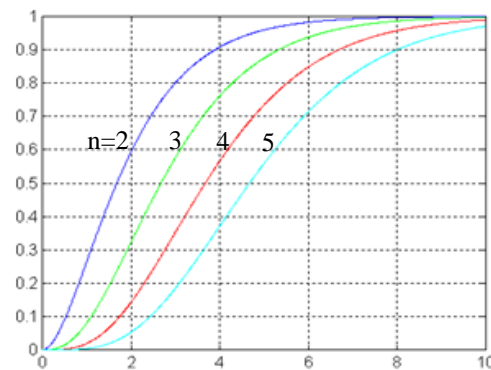


Punkt przegięcia

$$t_p = (n-1)T$$

Wysokość punktu przegięcia

n	2	3	4	5
$\frac{y_p}{y_u}$	0.264	0.323	0.353	0.371



Im rząd wyższy, tym punkt przegięcia leży wyżej.

*Uwaga.* Obiekty wieloinercyjne można aproksymować transmitancją drugiego rzędu z opóźnieniem, tzn.  $\frac{k}{(Ts + 1)^2} e^{-\tau s}$ , wyznaczając  $k$ ,  $T$  i  $\tau$  według powyższych wzorów.

### 10. $t_{10}$ i $t_{90}$ a inercja z opóźnieniem

Jeżeli punkt przegięcia  $y_p$  leży wyraźnie poniżej  $0.264y_u$ , to zamiast podwójnej inercji z opóźnieniem odpowiedniejsza jest inercja pierwszego rzędu z opóźnieniem, tj.  $\frac{k}{Ts + 1} e^{-\tau s}$ .

Modyfikacje wzorów

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow 0.1 = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow t_{10} \cong 0.1T$$

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \rightarrow t_{90} = 2.3T, \quad t_{90} - t_{10} = 2.2T$$

$$T \cong \frac{t_{90} - t_{10}}{2.2}, \quad \tau = t_{10} - 0.1T \quad \text{dla} \quad \frac{k}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

(Jeśli  $\tau < 0$ , to przyjąć  $\tau = 0$ .)

## APROKSYMACJE – PRZYKŁAD I

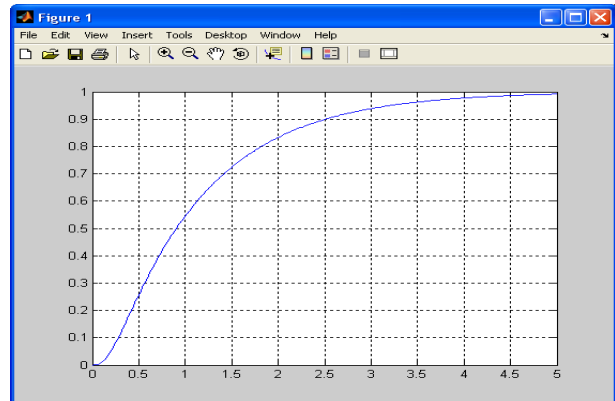
### 1. Obiekt

- „Prawdziwa” transmitancja

$$\frac{1}{(s+1)(0.1s+1)^2}$$

- Odpowiedź skokowa – Matlab

```
l = 1; m=conv([1 1], conv([0.1 1], [0.1 1]));
t = 0:0.02:5; yo=step(l, m, t);
plot(t,yo), grid
```



### 2. Punkt przegięcia

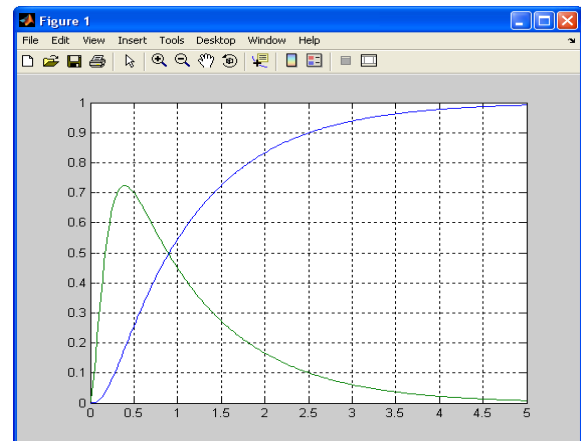
- Maksimum pochodnej  $\frac{dy}{dt}$

Odpowiedź  $y_0$  jest zapisana w pliku tekstowym (praktycznie w każdym pakiecie, nie tylko w Matlabie). Aproksymację pochodnej  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  wyznacza się za pomocą pętli *for* (dowolny język).

- Matlab

```
size(yo) → 251
dt = 0.02;
for i=1: 250;
yop(i)=(yo(i+1)-yo(i))/dt;    - Δy/Δt
end                               pochodna
yop(251)=yop(250); - wyrównanie rozmiaru
plot(t, yo, t, yop), grid

[t' yo yop']
...
0.40 0.1849 0.7233 → maksimum yop
...
```



*Wniosek.* Punkt przegięcia przypada na 0.1849, tj. wyraźnie poniżej 0.264 ( $\cong 25\%$ ). Zatem odpowiednia będzie inercja pierwszego rzędu z opóźnieniem.

### 3. Inercja z opóźnieniem

- Wykorzystanie  $t_{10}$  i  $t_{90}$

Matlab – [t' yo]

wiersze – (0.28 0.1001) →  $t_{10}=0.28$

(2.52 0.9007) →  $t_{90}=2.52$

$$T = \frac{2.52 - 0.28}{2.2} \cong 1,$$

$$\tau = 0.28 - 0.1 \cdot 1 \cong 0.18$$

- Aproksymacja

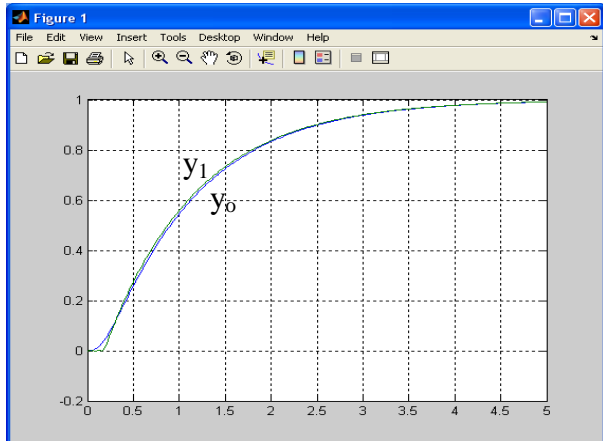
$$\frac{1}{s+1} e^{-0.18s}$$

- Matlab

```
[lp, mp] = pade(0.18, 8);
```

```
y1 = step(lp, conv(mp, [1 1]),t);
```

```
plot(t, yo,t,y1), grid
```



*Wniosek.* Za wyjątkiem samego początku aproksymacja wygląda korzystnie.

## APROKSYMACJE – PRZYKŁAD II

### 1. Obiekt

- Transmitancja  $\frac{1}{(s+1)^5}$

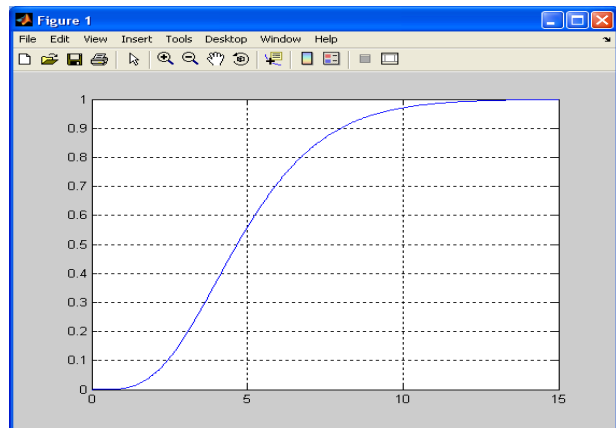
- Matlab

```
l = 1; m = conv([1 1], [1 1]);
```

```
m = conv(m, m);
```

```
m = conv([1 1], m); t = 0:0.05:15;
```

```
yo = step(l, m, t); plot(t, yo), grid
```



## 2. Punkt przegięcia

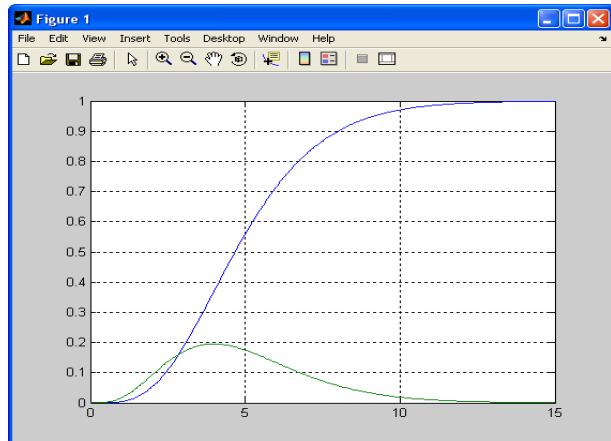
- Z powyższego przebiegu  $y_0$  widać wprost, że punkt przegięcia leży powyżej 25% wartości ustalonej, więc odpowiednia jest inercja drugiego rzędu z opóźnieniem. Tym niemniej poniżej powtórzono wyznaczenie punktu przegięcia.

Matlab

```
size(yo) → 301
dt=0.05;
for i=1:300;
    yop(i)=(yo(i+1)-yo(i))/dt;
end
yop(301)=yop(300);
plot(t, yo, t, yop), grid
[t' yo yop']
```

```
...
4.0 0.3712 0.1953
```

...  
Punkt przegięcia – 37% (>25%)



## 3. Podwójna inercja z opóźnieniem

- [t' yo]  
(2.43 0.100) →  $t_{10}=2.43$   
(8.00 0.900) →  $t_{90}=8.0$

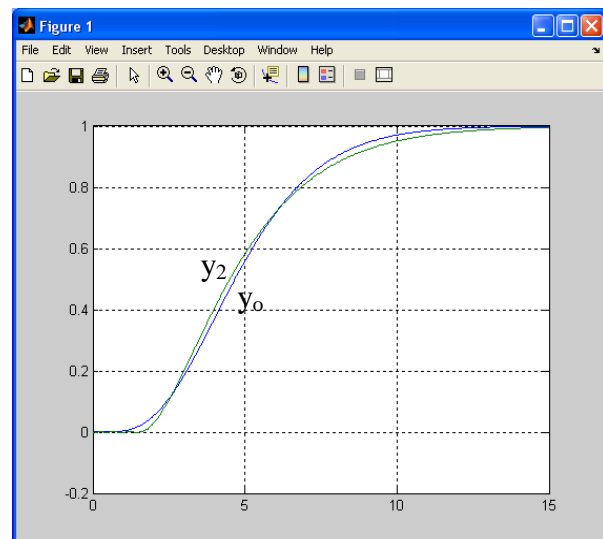
$$T = \frac{8.0 - 2.43}{3.3} = 1.69,$$

$$\tau = 2.43 - 0.53 \cdot 1.69 = 1.53$$

- Aproksymacja

$$\frac{1}{(1.69s + 1)^2} e^{-1.53s}$$

```
[lp, mp]=pade(1.53, 8);
m2=conv(conv([1.69 1], [1.86 1]), mp);
y2=step(lp, m2, t);
plot(t, yo, t, y2), grid
```



*Wniosek.* Krzywa  $y_2$  zupełnie dobrze aproksymuje odpowiedź obiektu  $y_0$ .

*Uwaga.* Jeżeli plik tekstowy z zarejestrowaną odpowiedzią skokową obiektu  $y_0$  liczy więcej niż kilkadziesiąt wierszy (max. 100), to przed wyznaczeniem pochodnej należy najpierw zredukować jego rozmiar uśredniając wartości  $y_0$  metodą średniej bieżącej (np. średnia z kolejnych 10-ciu pomiarów, gdy plik ma rozmiar 500). Jest to szczególnie istotne, gdy na skutek zakłóceń pomiarowych przebieg  $y_0$  nie jest gładki (jak wyżej), ale „postrzępiony”.