

## MODELE OBIEKTÓW STEROWANIA

Bilans masy. Zbiornik z wpływem pod ciśnieniem hydrostatycznym. Bilans energii – podgrzewacz. Opóźnienie. Napięciowe sterowanie silnikiem DC. Sterowanie prądowe.

### BILANS MASY

#### 1. Metodologia Maxwella (1868)

- Tok postępowania
  - 1) Ułożyć równania dynamiki układu regulacji i zbadać jak zależą ich rozwiązania (przebiegi) od nastaw regulatora występujących we współczynnikach równań.
  - 2) Wybrać takie nastawy, które dają najlepsze przebiegi ze względu na kształt i prędkość.

Punktem wyjścia jest ułożenie równania regulowanego obiektu (model matematyczny). Modelowanie, czyli układanie równań, opiera się o *podstawowe* prawa fizyki, termodynamiki, kinetyki chemicznej itp. Dla potrzeb automatyki wystarcza *umiarkowana dokładność* modelowania. Ważną zaletą układów ze sprzężeniem zwrotnym jest *odporność* na niedokładności modelowania.

- Podstawowy bilans

Bilans masy dotyczy wszelkich obiektów z przepływem cieczy, gazów, par, materiałów sypkich – zbiorniki, mieszalniki, kotły, reaktory itp.

$$M = V\rho = A h \rho ,$$

gdzie w przypadku zbiornika:

$M$  – masa cieczy,                       $A$  – powierzchnia przekroju zbiornika  
 $V$  – objętość,                               $h$  – wysokość słupa cieczy  
 $\rho$  – gęstość

Równanie bilansu ma postać

$$\frac{dM}{dt} = A \rho \frac{dh}{dt} = \sum_i q_i \rho_i - \sum_j q_j \rho_j$$

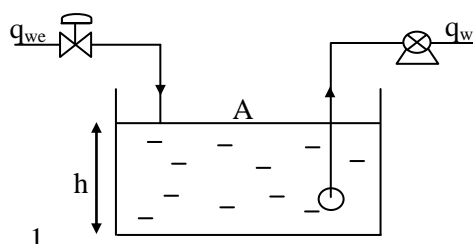
$q_i, q_j$  – przepływy objętościowe ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

#### 2. Zbiornik z pompą opróżniającą

- Dane liczbowe:

$$A = 2 \text{ m}^2$$

$$\overline{q_{we}} = \overline{q_{wy}} \text{ – średnie przepływy}$$



- Równanie bilansu

$$\frac{dM}{dt} = A\rho \frac{dh}{dt} = q_{we} \rho - q_{wy} \rho \quad / : \rho, \quad A \frac{dh}{dt} = q_{we} - q_{wy}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (q_{we} - q_{wy})$$

### 3. Transformata Laplace'a (transformacja)

- Transformata Laplace'a pozwala zastąpić liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach równaniem algebraicznym w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$  nazywanej operatorem Laplace'a.

W  $s = \delta + j\omega$  część rzeczywista  $\delta$  reprezentuje tłumienie, a część urojona  $\omega$  – częstotliwość.

Rozwiązywanie równań algebraicznych jest prostsze niż rozwiązywanie równań różniczkowych. Rozwiązanie w postaci czasowej otrzymuje się korzystając z wzorów podanych w tabelach odwrotnej transformaty Laplace'a. Pakiety komputerowe wspomagające projektowanie na ogół wymagają danych w notacji Laplace'a.

- Definicja transformaty Laplace'a funkcji  $f(t)$

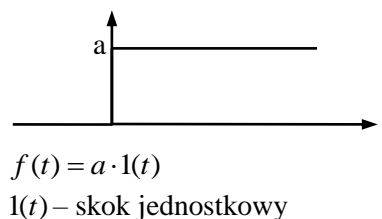
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L\{f(t)\}$$

gdzie  $f(t)$  nie rośnie szybciej niż wykładniczo i  $f(t)=0$  dla  $t < 0$ .

- Przykład – stała  $a$

$$f(t) = a \text{ dla } t \geq 0, \quad f(t) = 0 \text{ dla } t < 0.$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} a e^{-st} dt = \frac{a}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{a}{-s} = \frac{a}{s}$$



- Funkcja wykładnicza –  $f(t) = e^{-at}$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{-(s+a)} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$a = \frac{1}{T} \rightarrow F(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{T}{Ts + 1} \quad - T \text{ jest nazywane stałą czasową.}$$

- Transformata pochodnej (całkowanie „przez części”)

$$L\left\{\frac{df}{dt}(t)\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - (-s) \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + s \cdot F(s) = sF(s) - f_0$$

ponieważ  $f(t)e^{-st} \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow \infty$  ( $f(t)$  nie rośnie szybciej niż wykładniczo).

#### 4. Transmitancja obiektu

- Transformacja Laplace'a obydwu stron równania poziomu przy  $h_0 = 0$ :

$$L\left\{\frac{dh}{dt}\right\} = \frac{1}{A} L\{q_{we} - q_{wy}\} \quad \rightarrow \quad sH(s) - 0 = \frac{1}{A} [Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)]$$

$$H(s) = \frac{Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)}{As} \quad \text{lub} \quad \frac{H(s)}{Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)} = \frac{1}{As}$$

$$\frac{\text{wyjście}}{\text{wejście}} = \text{transmitancja}$$

Transmitancja jest stosunkiem wyjścia do wejścia w dziedzinie operatora Laplace'a  $s$  i określa własności dynamiczne obiektu lub układu regulacji automatycznej.

- Transmitancja całkująca

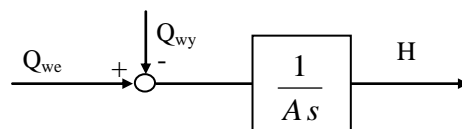
Całkowanie względem czasu równania poziomu:

$$\int_0^t \frac{dh}{dt} dt = \frac{1}{A} \int_0^t (q_{we} - q_{wy}) dt \quad \rightarrow \quad \int_0^h dh = \frac{1}{A} \int_0^t (q_{we} - q_{wy}) dt \quad h_0 = 0$$

$$L\left\{\frac{dh}{dt}\right\} = L\left\{\frac{1}{A} \int_0^t (q_{we} - q_{wy}) dt\right\} \quad \rightarrow \quad \int_0^h dh = h = \frac{1}{A} \int_0^t (q_{we} - q_{wy}) dt$$

Ponieważ  $H(s) = \frac{1}{As} [Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)]$  zatem  $L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$  – w ogólnym przypadku.

- Schemat blokowy



Obiekt całkujący (integrator)

#### 5. MATLAB – program tekstowy

- Kod

```

MATLAB 7.4.0 (R2007a)
File Edit Debug Desktop Window Help
[Icons]
Shortcuts [x] How to Add [x] What's New

>> l=1
m=[2 0]
t=0:0.1:10;
y=step(l,m,t);
plot(t,y),grid
    
```

$l$  – licznik transmitancji

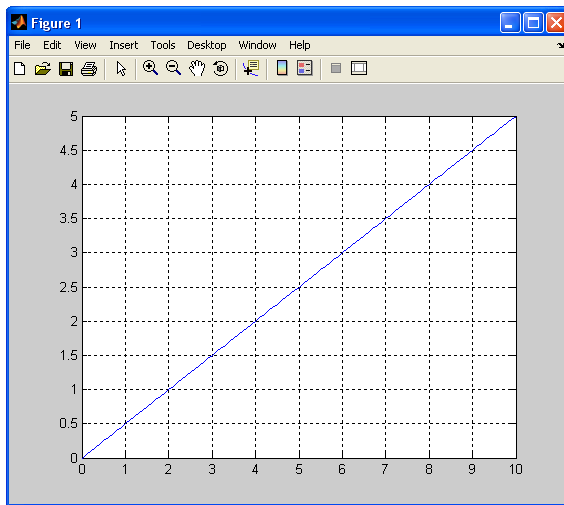
$m$  – mianownik

$t$  – czas

$y$  – wyjście

$step()$  – odpowiedź na skok jednostkowy

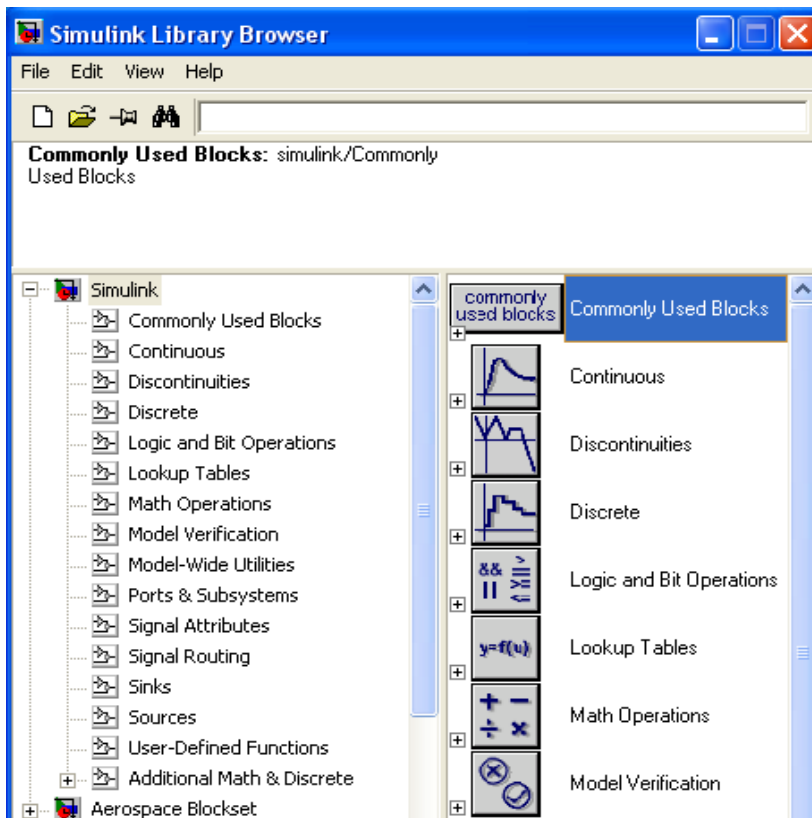
- Wykres – *plot()*



Różnica między dopływem a odpływem powoduje ciągłą zmianę poziomu. Układu sterowania takim obiektem nie wolno wyłączać, bo zbiornik albo zostanie przelany, albo zupełnie opróżniony.

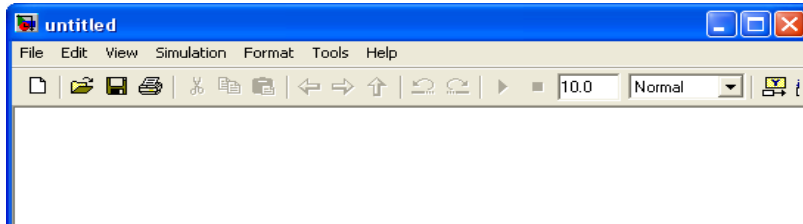
## 6. SIMULINK – schemat graficzny

- Ikona  lub komenda *simulink*



Biblioteki

- *File > New > Model* lub lewa ikona (*Simulink Library Browser*)  
Pojawia się puste okno do tworzenia schematu



Zmiana nazwy z *Untitled* na docelową, np. *Zbiornik\_1*

*File > Save as ... /Zbiornik\_1.mdl* – rozszerzenie *mdl* (model) dodawane automatycznie

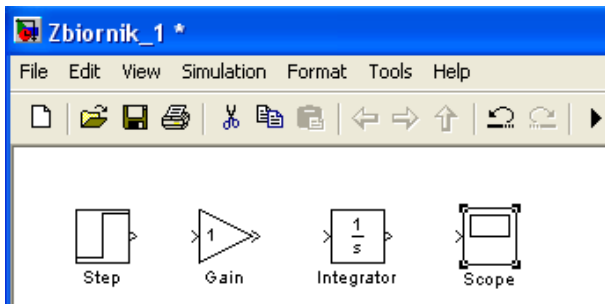
- Umieszczenie bloków *Step*, *Gain*, *Integrator*, *Scope*  
Zaznaczyć blok w wybranej bibliotece i przeciągnąć na schemat trzymając lewy klawisz myszy (lkm).

*Sources > Step*

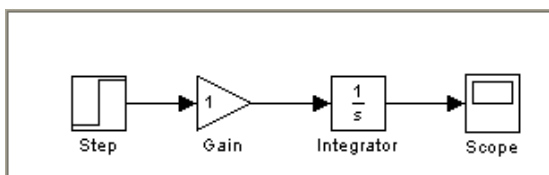
*Math Operations > Gain*

*Continuous > Integrator*

*Sinks > Scope*



- Połączenia  
Kliknąć na wyjściu i przeciągnąć do wejścia (trzymając lkm).



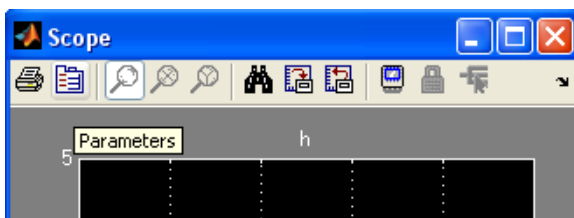
- Parametryzacja bloków  
2 kliknięcia bloku, wypełnić odpowiednie pola pojawiającego się okna *Parameters*.

*Step* → b.z.

*Gain* → *Gain: 0.5*

*Integrator* → b.z.

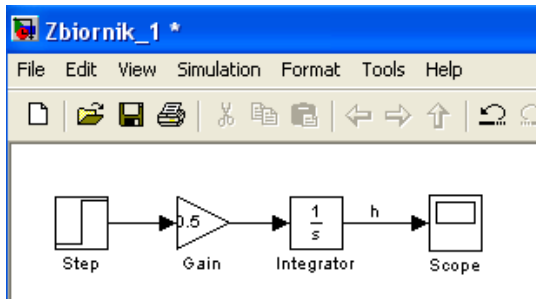
*Scope* > 2 kl. > Ikona *Parameters* (druga) w oknie *Scope* → b.z.



- Opis sygnału, np.  $h$

Prawym klawiszem myszy (pkm) zaznaczyć połączenie > *Signal Properties* > *Signal name: h* (w razie potrzeby przesunąć trzymając lkm).

Finalny schemat



- Czas symulacji


*Simulation* > *Configuration Parameters*: *Start time: 0.0*

*Stop time: 10.0*

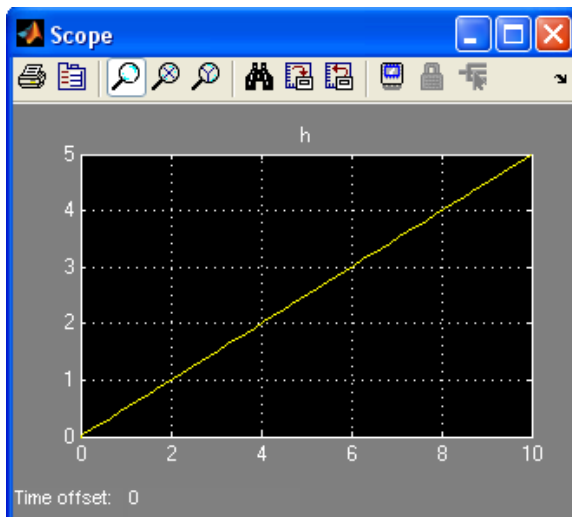
*Type: Variable-step* (laboratorium – *Fixed-step*)

*Uwaga.* Krok obliczeń dostosowany automatycznie (*Variable-step*) generuje ostrzeżenia (*Warning*) w oknie Matlab. Nie są one jednak istotne.

- Symulacja

Ikona  lub *Simulation* > *Start*

2 kliknięcia bloku *Scope* > Ikona *Autoscale* (lornetka) w pojawiającym się oknie *Scope*.



# ZBIORNIK Z WYPŁYWEM POD CIŚNIENIEM HYDROSTATYCZNYM

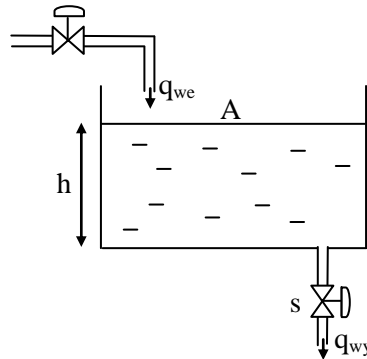
## 1. Dane i model ogólny

- Dane liczbowe:

$$A = 5 \text{ m}^2$$

$$\bar{h} = 10 \text{ m}$$

$$\overline{q_{we}} = \overline{q_{wy}} = 108 \text{ m}^3/\text{h} = 0.03 \text{ m}^3/\text{s}$$



- Model ogólny (nieliniowy)

W stanie nominalnym objętość cieczy w zbiorniku nie ulega zmianie.

$$\overline{q_{we}} - \overline{q_{wy}} = 0 \quad \overline{q_{wy}} = \bar{s} \sqrt{2g\bar{h}}$$

$$\overline{q_{we}} - \bar{s} \sqrt{2g\bar{h}} = 0 \quad \text{– równanie stanu ustalonego}$$

$$\bar{s} = \frac{\overline{q_{we}}}{\sqrt{2g\bar{h}}} \quad \text{– powierzchnia swobodna zaworu na odpływie (do obliczenia)}$$

Równanie dynamiki

$$A \frac{dh}{dt} = \underbrace{q_{we} - s\sqrt{2gh}}_{\text{funkcja nieliniowa}}$$

- Obliczenia dla stanu ustalonego

$$\bar{s} = \frac{\overline{q_{we}}}{\sqrt{2g\bar{h}}} = \frac{0.03}{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 10}} = 0.00214 \text{ m}^2 (= 21.4 \text{ cm}^2)$$

*Pytanie.* Jaki poziom uzyska się dla dopływu zmniejszonego, np. 0.02 lub 0.01 m<sup>3</sup>/s, przy takim samym stopniu otwarcia zaworu?

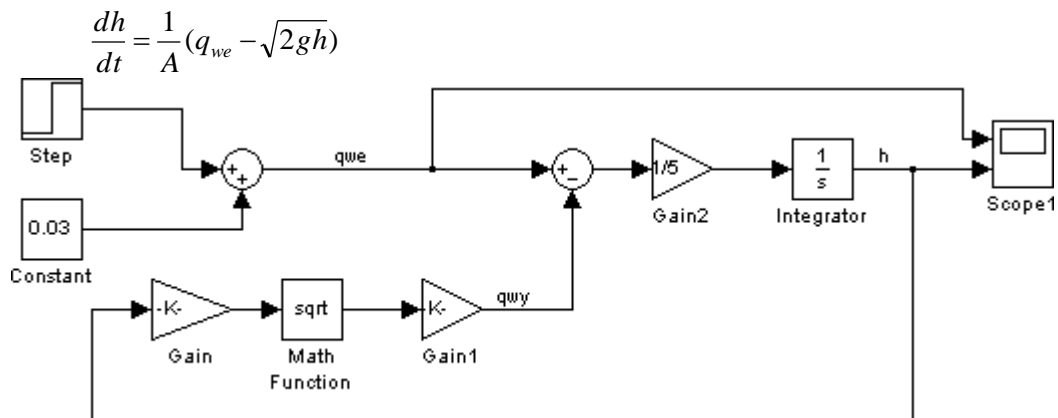
(Rozwiązanie równania różniczkowego np. Maple:

$$h = \frac{1}{2g} \left( \frac{q_{we}}{s} \right)^2$$

$$q_{we} = 0.02 \rightarrow h = 4.45 \text{ m}, \quad q_{we} = 0.01 \rightarrow h = 1.11 \text{ m}, \quad (s = 0.00214)$$

## 2. Simulink

- Równanie i schemat



### Wyjaśnienia

- Blok Step posłuży do wprowadzenia 10% zmiany dopływu (po pewnym czasie), tj.  $\Delta q_{we} = 0.003 \text{ m}^3/\text{s}$ .
- Nowe bloki: *Sources > Constant*, *Math Operations > Sum*  
*Math Operations > Math Function (sqrt wybrane w parametryzacji, zob. niżej)*.
- Węzeł z wyprowadzeniem sygnału – Ctrl + lkm

### • Parametryzacja

#### Bloki

<i>Step</i>	→ <i>Step time: 1000</i>	– zmiana dopływu po 1000 s
	<i>Final value: 0.003</i>	– $\Delta q_{we}$ (10%)
<i>Constant</i>	→ <i>Constant value: 0.03</i>	– $\bar{q}_{we}$
<i>Gain</i>	→ <i>Gain: <math>2 \times 9.81</math></i>	– $2g$
<i>Math Function</i>	→ <i>Function: sqrt</i>	– wybór z menu
<i>Gain1</i>	→ <i>Gain: 0.00214</i>	– $\bar{s}$
<i>Sum</i>	→ <i>List of signs: I++, I+-</i>	
<i>Gain2</i>	→ <i>Gain: 1/5</i>	– $1/A$
<i>Integrator</i>	→ <i>Initial condition: 10.0</i>	– $\bar{h}$ , wartość początkowa odpowiadająca $\bar{q}_{we}$ , względem której nastąpi zmiana poziomu.

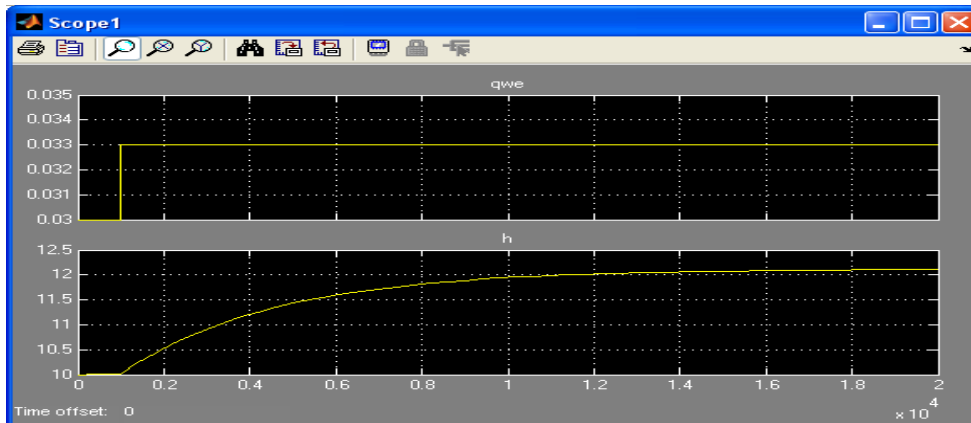
*Scope > 2 kl. > Ikona Parameters (druga) → Number of axes: 2* – dwa wykresy; parametryzację *Scope* zaleca się przeprowadzić przed łączeniem bloków.

#### Czas symulacji

*Simulation > Configuration Parameters > Stop time: 20000* – dobrany po próbach

### • *Simulation > Start*

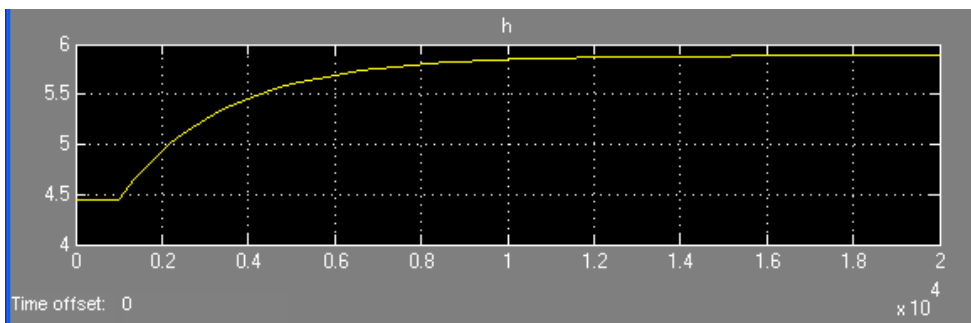




Wzrost poziomu o ponad 2 m po czasie około 17000 s (4.7 godz.)

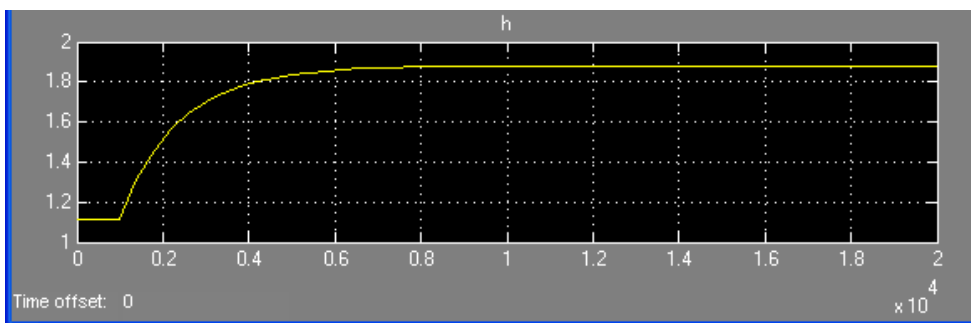
- Mniejszy dopływ

1)  $q_{we} = 0.02$  – Constant,  $h = 4.45$  m – Integrator/Initial condition



Wzrost poziomu o około 1.5 m po czasie 14000 s (3.9 godz.)

2)  $q_{we} = 0.01$ ,  $h = 1.11$  m



Wzrost poziomu o około 0.8 m po czasie 7500 s (2.1 godz.)

Własności dynamiczne obiektów sterowania opisanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi zmieniają się wraz z punktem pracy.

Regulatory stroi się dla nominalnego punktu pracy. W przypadku, gdy punkt pracy się zmienia (podczas tzw. regulacji programowej) nastawy regulatora powinny być do niego dostosowywane (*gain scheduling*).

### 3. Linearyzacja modelu dynamiki

- Niewielkie przyrosty

$$h(t) = \bar{h} + \Delta h(t), \quad q_{we}(t) = \bar{q}_{we} + \Delta q_{we}(t), \quad s(t) = \bar{s} + \Delta s(t),$$

W celu przybliżenia funkcji nieliniowej przez funkcję liniową należy zastosować rozwinięcie w szereg Taylora dla stanu nominalnego.

$$A \frac{dh}{dt} = q_{we} - s\sqrt{2gh}$$

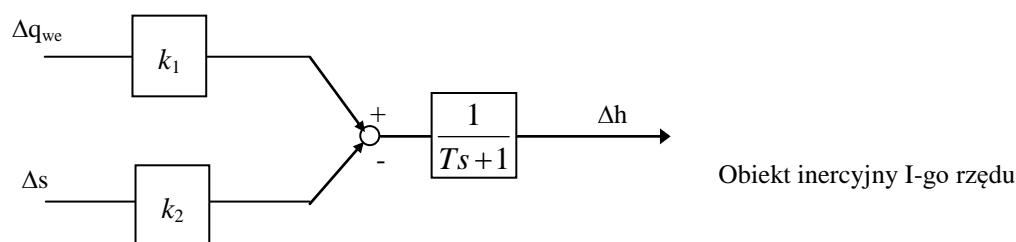
$$A \frac{d\Delta h}{dt} \cong 1 \cdot \Delta q_{we} - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta s - \bar{s} \frac{2g}{2\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta h$$

$$\text{Laplace: } As \Delta H(s) = \Delta Q_{we}(s) - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta S(s) - \frac{\bar{s}g}{\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta H(s)$$

$$As \Delta H(s) + \frac{\bar{s}g}{\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta H(s) = \Delta Q_{we}(s) - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta S(s) \quad \Bigg/ \cdot \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{sg}$$

$$\left( \underbrace{A \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{sg}}_T s + 1 \right) \Delta H(s) = \underbrace{\frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{sg}}_{k_1} \Delta Q_{we}(s) - \underbrace{\frac{2\bar{h}}{sg}}_{k_2} \Delta S(s)$$

- Schemat blokowy



### 4. Obliczenia i przekształcenia

- Stała czasowa i wzmocnienia

$$T = A \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{sg} = 5 \frac{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 10}}{0.00214 \cdot 9.81} = 3336 \text{ s}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{sg} = 667 \text{ m/m}^3 / \text{s}, \quad k_2 = \frac{2\bar{h}}{sg} = \frac{2 \cdot 10}{0.00214} = 4673 \text{ m/m}^2$$

$$3336 \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = 667 \Delta q_{we} - 4673 \Delta s \quad - \text{ czas w sekundach}$$

- Zmiana skali czasu

$$\frac{3336}{3600} \frac{d\Delta h}{dt_h} + \Delta h = \frac{667}{3600} \Delta q_{we}^h - 4673 \Delta s \quad - \text{ czas w godzinach}$$

$$0.926 \frac{d\Delta h}{dt_h} + \Delta h = 0.185 \Delta q_{we}^h - 4673 \Delta s \quad - \Delta q_{we}^h \text{ w m}^3/\text{h}$$

- Jednostki względne (normalizacja)

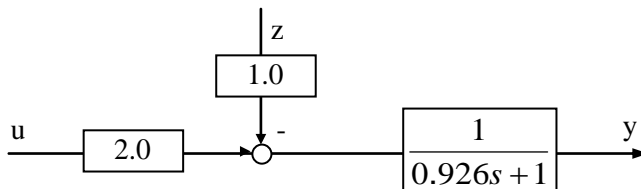
$$y = \frac{\Delta h}{h} \quad - \text{ wyjście (zmienna procesowa)}$$

$$u = \frac{\Delta q_{we}}{q_{we}} \quad - \text{ sterowanie}, \quad z = \frac{\Delta s}{s} \quad - \text{ zakłócenie}$$

$$0.926 \frac{d\left(\frac{\Delta h}{h}\right)}{dt_h} + \frac{\Delta h}{h} = 0.185 \frac{1}{h} \Delta q_{we}^h \frac{\overline{q_{we}^h}}{q_{we}^h} - 4673 \frac{1}{h} \Delta s \frac{\overline{s}}{s}$$

$$0.926 \frac{dy}{dt_h} + y = 2.0 u - 1.0 z$$

- Schemat blokowy



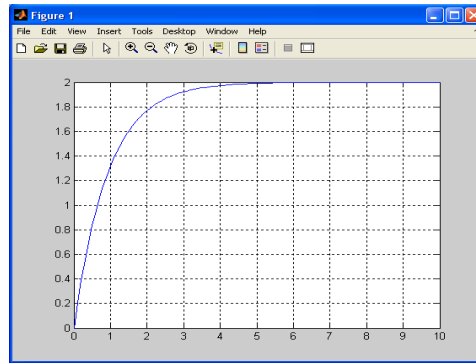
Model zbiornika po przeskalowaniu czasu i normalizacji zmiennych (obiekt inercyjny)

Po przeskalowaniu czasu i normalizacji zmiennych (jednostki względne) współczynniki w równaniu stają się rzędu 1. Jest to istotne dla implementacji w sterowniku ze względu na dokładność obliczeń numerycznych.

Zmiana średniego poziomu w zbiorniku, tzn. punktu pracy, powoduje zmianę współczynników transmitancji ze względu na nieliniowość modelu. Układ ze sprzężeniem zwrotnym powinien być do pewnego stopnia odporny na te zmiany.

- Matlab

```
l= 2
m= [0.926 1]
t= 0:0.1:10;
y= step(l,m,t);
plot(t,y), grid
```

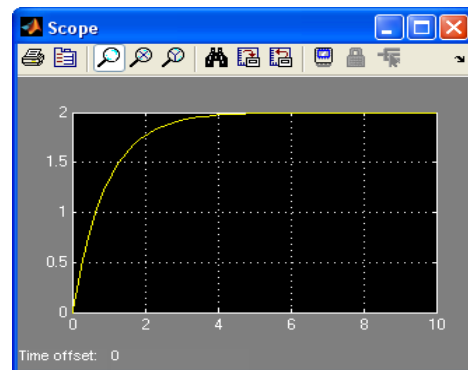


Powszechnie przyjmuje się, że odpowiedź obiektu inercyjnego ustala się po *czterech stałych czasowych*.

- Zależność poziomu od stopnia otwarcia zaworu na odpływie:

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta S(s)} = -\frac{k_2}{T_s + 1}$$

- Simulink



Continuous > Transfer Fcn  
 Numerator coefficient: [1]  
 Denominator coefficient: [.926 1]

## BILANS ENERGII – PODGRZEWACZ

### 1. Równanie bilansu

- Bilans energii stosuje się do tworzenia modeli matematycznych takich obiektów jak piece, suszarnie, reaktory, wymiennikowne, podgrzewacze itp.

$$E = M c T,$$

gdzie:

$E$  - energia,

$\rho$  - gęstość

$M$  - masa ( $M = V\rho$ ),

$T$  - temperatura

$V$  - objętość obiektu,

$c$  - ciepło właściwe

Równanie bilansu można przedstawić jako:

$$\frac{dE}{dt} = V\rho c \frac{dT}{dt} = \sum_i q_i \rho_i c_i T_i - \sum_j q_j \rho_j c_j T_j \pm \Delta P$$

$\Delta P$  - moc doprowadzona lub odprowadzona

## 2. Podgrzewacz elektryczny

- Dane liczbowe:

$$V = 0.01 \text{ m}^3 (=10 \text{ l})$$

$$\bar{T}_0 = 20^\circ\text{C}$$

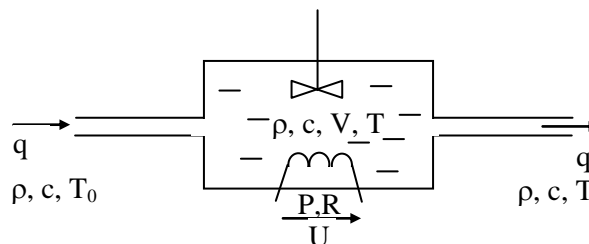
$$\bar{T} = 60^\circ\text{C}$$

$$\bar{q} = 0.12 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0333 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (= 2 \text{ l/min})$$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 4.19 \cdot 10^3 \text{ J/kg K}$$

$$\bar{U} = 250 \text{ V}$$



- Warunki nominalne

$$\bar{q} \rho c \bar{T}_0 - \bar{q} \rho c \bar{T} + \bar{P} = 0$$

Bilans dynamiczny

$$V \rho c \frac{dT}{dt} = q \rho c T_0 - q \rho c T + \frac{U^2}{R}$$

- Obliczenia dla warunków nominalnych

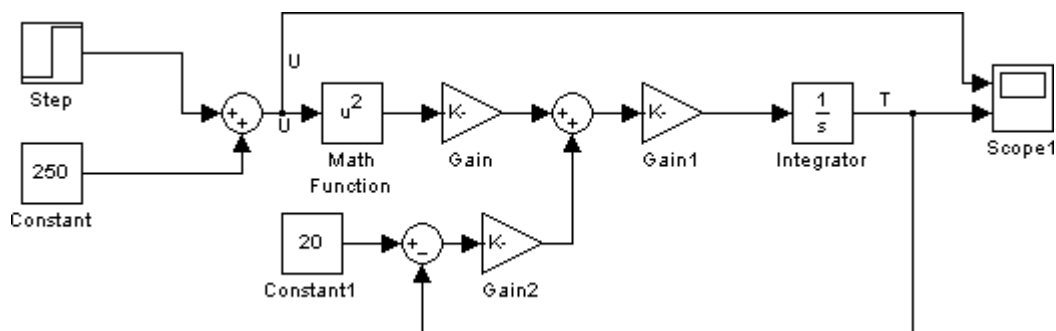
$$P = \frac{\bar{U}^2}{R} = \bar{q} \rho c (\bar{T} - \bar{T}_0) \Rightarrow R = \frac{250^2}{0.0333 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 4.19 \cdot 10^3 \cdot (60 - 20)} = 11.2 \Omega$$

Pytanie. Jaką temperaturę uzyska się przy napięciu  $U=150 \text{ V}$ ?

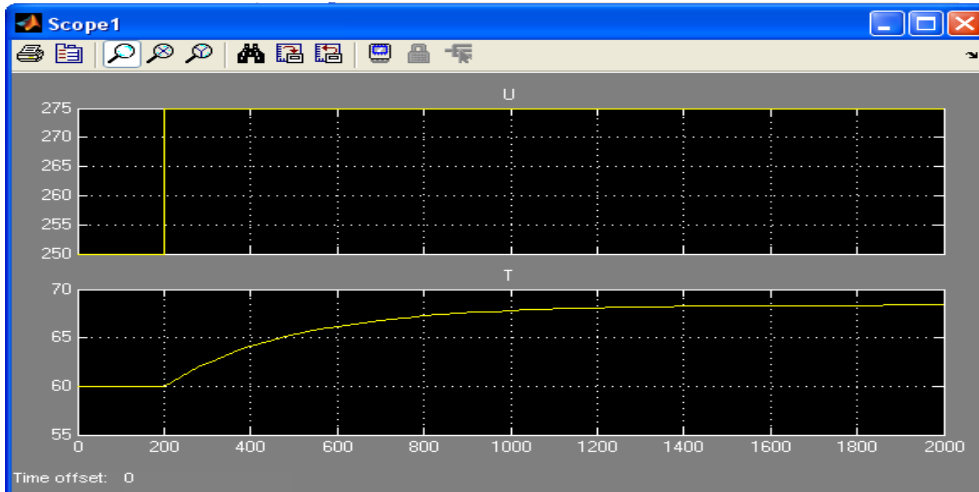
$$T = \frac{1}{q \rho c} \cdot \frac{U^2}{R} + T_0, \quad U = 150 \text{ V} \rightarrow T = 34.4^\circ\text{C} \text{ - znaczny spadek temperatury}$$

- Simulink

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{V \rho c} [q \rho c (T_0 - T) + \frac{U^2}{R}]$$

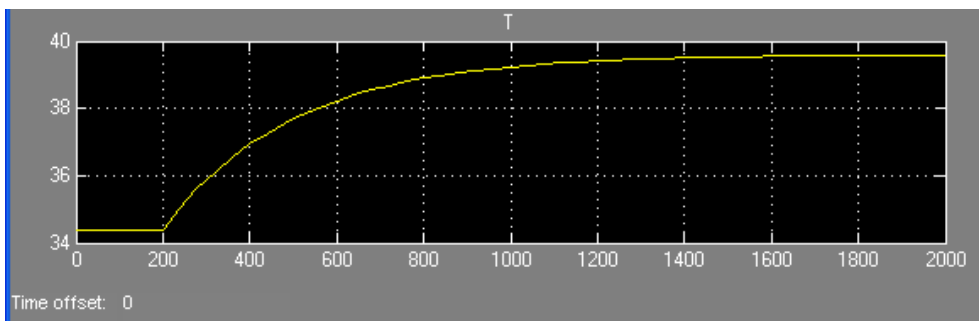


Step → Step time: 200, Final value: 25 – 10% z  $\bar{U} = 250\text{ V}$   
 Gain → 1/11.2 – 1/R  
 Gain1 → 1/(0.01\*1000\*4.19\*1000) – 1/(Vρc)  
 Gain2 → 0.0333\*0.001\*1000\*4.19\*1000) – qρc  
 Simulation → Step time 2000



Wzrost o około 8°C w ciągu 1400 s.

Mniejsze napięcie:  $U = 150\text{ V} - \text{Constant}$ , Integrator/Initial condition: 34.4



Wzrost o ponad 5°C w ciągu około 1400 s.

### 3. Linearyzacja

$$V \rho c \frac{dT}{dt} = q \rho c T_0 - q \rho c T + \frac{U^2}{R}$$

- Prawa strona bilansu jest nieliniowa, więc należy ją rozwinąć w szereg Taylora względem  $T, q, U, T_0$ .

$$V \rho c \frac{d\Delta T}{dt} = \rho c \bar{T}_0 \Delta q - \rho c \bar{T} \Delta q + \bar{q} \rho c \Delta T_0 - \bar{q} \rho c \Delta T + \frac{2\bar{U}}{R} \Delta U$$

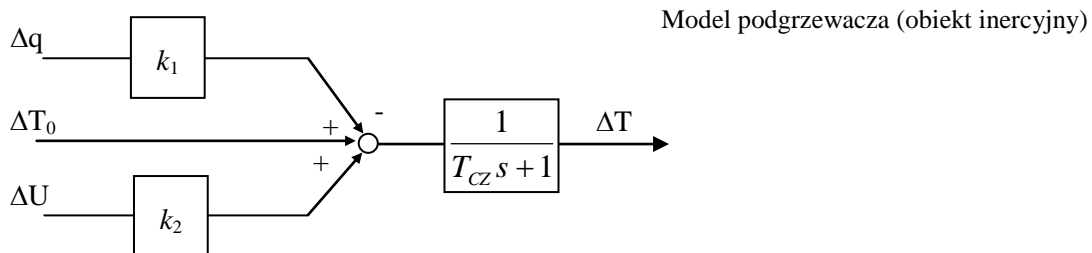
Transformacja Laplace'a

$$V \rho c s \Delta T(s) = \rho c \bar{T}_0 \Delta Q(s) - \rho c \bar{T} \Delta Q(s) + \bar{q} \rho c \Delta T_0(s) - \bar{q} \rho c \Delta T(s) + \frac{2\bar{U}}{R} \Delta U(s)$$

$$(V \rho c s + \bar{q} \rho c) \Delta T(s) = -\rho c (\bar{T} - \bar{T}_0) \Delta Q(s) + \bar{q} \rho c \Delta T_0(s) + \frac{2\bar{U}}{R} \Delta U(s) \quad /: \bar{q} \rho c$$

$$\left( \begin{array}{c} \frac{V}{\bar{q}} s + 1 \\ \frac{\bar{q}}{\bar{T}_{CZ}} \end{array} \right) \Delta T(s) = - \underbrace{\frac{\bar{T} - \bar{T}_0}{\bar{q}}}_{k_1} \Delta Q(s) + \Delta T_0(s) + \underbrace{\frac{2\bar{U}}{R \bar{q} \rho c}}_{k_2} \Delta U(s)$$

- Schemat blokowy



#### 4. Obliczenia

- Stała czasowa i wzmocnienia

$$T_{CZ} = \frac{0.01}{0.0333 \cdot 10^{-3}} = 300 \text{ s}, \quad k_1 = \frac{60 - 20}{0.0333 \cdot 10^{-3}} = 1.2 \cdot 10^6 \text{ K/m}^3/\text{s}$$

$$k_2 = \frac{2 \cdot 250}{11.2 \cdot 0.0333 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 4.19 \cdot 10^3} = 0.32 \text{ K/V}, \quad P = \frac{U^2}{R} = \frac{250^2}{11.2} = 5580 \text{ W} = 5.58 \text{ KW}$$

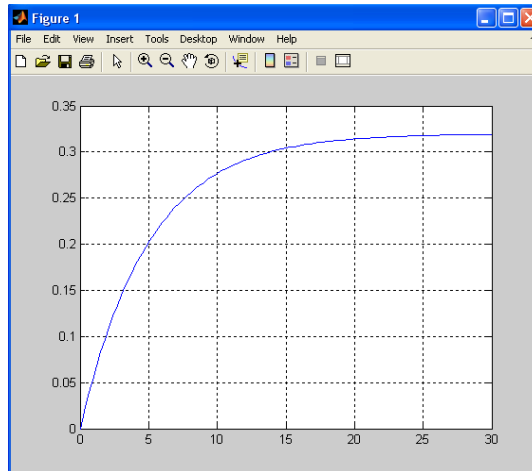
- Zmiana jednostek – czas w minutach, przepływ w m<sup>3</sup>/h

$$\frac{300}{60} \frac{d\Delta T}{dt_{\text{min}}} + \Delta T = -\frac{1.2 \cdot 10^6}{3600} \Delta q_h + \Delta T_0 + 0.32 \Delta U$$

$$5 \frac{d\Delta T}{dt_{\text{min}}} + \Delta T = -33.3 \Delta q_h + \Delta T_0 + 0.32 \Delta U$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{k_2}{T_{CZ} s + 1} = \frac{0.32}{5 s + 1}$$

- Matlab
  - $l=0.32$
  - $m=[5\ 1]$
  - $t=0:0.3:30$ ;
  - $y=\text{step}(l,m,t)$ ;
  - $\text{plot}(t,y), \text{grid}$



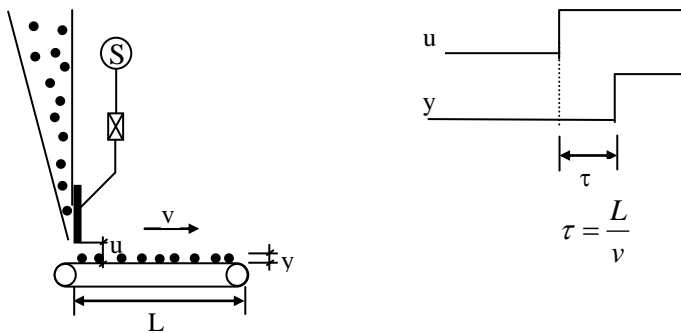
Simulink – jak poprzednio.

## OPÓŹNIENIE

### 1. Transport

- W większości procesów technologicznych występuje transport ciecży, gazów, materiałów sypkich itp. (rurociągi, taśmociągi, podajniki). Pojawia się problem – jak transport uwzględnić w transmitancji? (opóźnienie transportowe)

Również przenikanie ciepła przez ściany, mieszanie, dyfuzja itp. odbywa się ze skończoną prędkością.

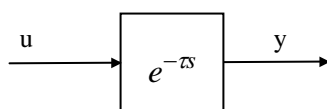


Opóźnienie transportowe w kotle rusztowym.

### 2. Transmitancja i aproksymacja Padé

- Transmitancja transcedentna

$$y(t) = u(t - \tau), \quad Y(s) = U(s) \cdot e^{-\tau s}$$



Opóźnienie jako transmitancja transcedentna



- Aproksymacja opóźnienia – przybliżenie Padé

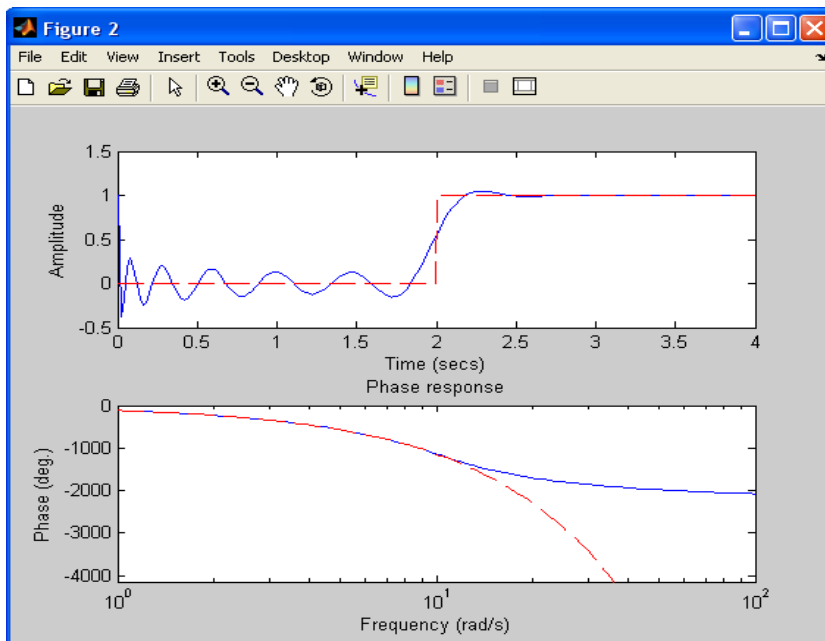
Matlab –  $pade(\tau, n)$ ,  $n = 1, \dots, 12$

$$\text{I rz\ddot{a}d: } \boxed{e^{-\tau s} \cong \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} = \frac{-\frac{\tau}{2}s + 1}{\frac{\tau}{2}s + 1}}, \quad \text{np.: } e^{-2s} \cong \frac{-s + 1}{s + 1}$$

$$\text{II: } e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{(\tau s)^2}{12} + \frac{\tau s}{2} + 1}{\frac{(\tau s)^2}{12} + \frac{\tau s}{2} + 1} \quad \text{III: } e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{(\tau s)^3}{120} + \frac{(\tau s)^2}{10} - \frac{\tau s}{2} + 1}{\frac{(\tau s)^3}{120} + \frac{(\tau s)^2}{10} + \frac{\tau s}{2} + 1}$$

- Matlab

```
>> pade(2,12)
Step response of 12th-order Pade approximation
```



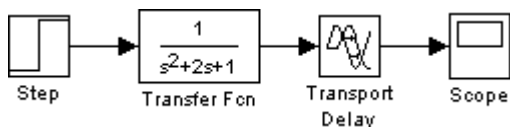
*Uwaga.* Symulacja czasowa samego opóźnienia w Matlabie daje dobre wyniki tylko dla gładkich wymuszeń (np. sinusoida). Dla wymuszeń ze skokami, ostrzami itp. (jak wyżej) występują spore rozbieżności. Znacznie lepiej będzie wyglądać symulacja układu ze sprzężeniem zwrotnym.

Transmitancje obiektów technologicznych (energetycznych, chemicznych i in.) należy zwykle uzupełnić o pewne opóźnienie, co daje:

$$\frac{1}{Ts} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{Ts+1} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{(Ts+1)^2} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)} e^{-\tau s}.$$

Bardzo często wartość  $\tau$  określa się eksperymentalnie.

- Simulink



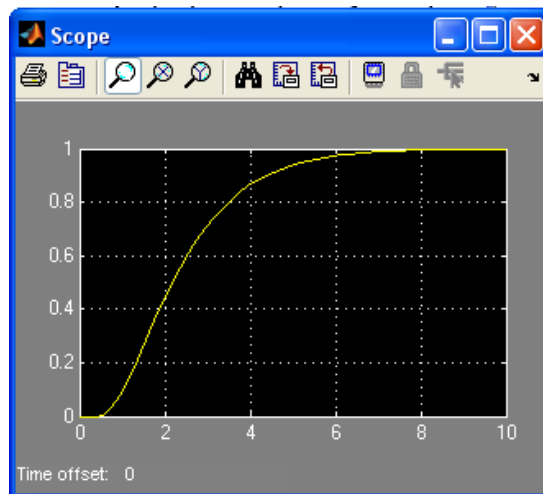
Continuous > Transport Delay

Time delay: 0.5

Step > Step time: 0

Transmitancja przykładowa –

$$\frac{1}{s^2+2s+1} e^{-0.5s}$$

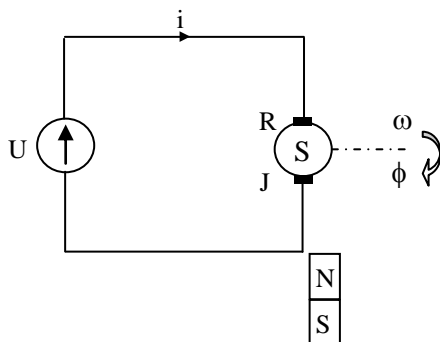


## NAPIĘCIOWE STEROWANIE SILNIKIEM DC

### 1. Silnik prądu stałego (Direct Current)

- Zastosowanie: starsze napędy obrabiarek, robotów, rejestratorów, suwnic itd. ze sterowaniem poprzez napięcie wirnika. Napędy małej mocy sterowane wprost z układu scalonego.

Wadą silników prądu stałego jest stosowanie komutatora. Obecnie zaczynają przeważać silniki bezkomutatorowe (odpowiedni materiał magnetyczny wirnika i elektroniczny sterownik impulsowy dla stojana).



Zasilanie napięciem  $U$  generowanym przez sterownik za pośrednictwem wzmacniacza mocy.

### 2. Uproszczony opis silnika DC

- Równanie napięć

$$U = SEM + iR$$

Dla potrzeb modelowania w automatyce pomija się indukcyjność wirnika ( $L \approx 0$ ).

- Równanie momentów

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{em} - M_o - D\omega$$

gdzie:

$D$  – współczynnik tarcia,  $R$  – rezystancja komutatora  
 $J$  – moment bezwładności,  $M_{em}$  – moment elektromagnetyczny  
 $\omega$  – prędkość kątowna,  $M_o$  – moment obciążenia  
 $\phi$  – kąt.

Ponadto

$$SEM = c_s \omega, \quad M_{em} = k_s i, \quad D \approx 0$$

- Przekształcenia

Chodzi o utworzenie równań wiążących prędkość  $\omega$  z napięciem  $U$  i momentem obciążenia  $M_o$ .

Z równania napięcie wyznacza się prąd i podstawia do równania momentów

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_s \frac{U - c_s \omega}{R} - M_o \Big/ \cdot R$$

Transformacja Laplace'a

$$J R s \Omega(s) + k_s c_s \Omega(s) = k_s U(s) - R M_o(s) \quad / : k_s c_s$$

$$\left( \frac{JR}{k_s c_s} s + 1 \right) \Omega(s) = \frac{k_s}{k_s c_s} U(s) - \frac{R}{k_s c_s} M_o(s)$$

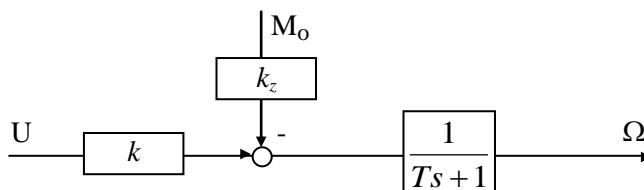
$$\left( \frac{JR}{k_s c_s} s + 1 \right) \Omega(s) = \frac{1}{\underbrace{\frac{c_s}{k}}_T} U(s) - \frac{R}{\underbrace{k_s c_s}_{k_z}} M_o(s)$$

Ostatecznie

$$\Omega(s) = \frac{k}{Ts+1} U(s) - \frac{k_z}{Ts+1} M_o(s)$$

Jest to transmitancja inercyjna, podobnie jak w przypadku zbiornika i podgrzewacza.

- Schemat blokowy



Model silnika sterowanego napięciowo

Jeśli  $M_o = 0$ , to:

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

Transmitancje całkiem różnych obiektów fizycznych mogą mieć ten sam charakter. Zatem w jednolity sposób można analizować i projektować układy, które nimi sterują (mówi się więc o interdyscyplinarności automatyki).

### 3. Wyznaczanie transmitancji na podstawie danych znamionowych

- Dane liczbowe:

$$\begin{aligned} U_N &= 24 \text{ V} & P_N &= M_N \omega_N = U_N I_N \\ n_N &= 3000 \text{ obr/min} & I_N &= \frac{P_N}{U_N} = \frac{100}{24} = 4.17 \text{ A} \\ P_N &= 100 \text{ W} \\ R &= 1 \Omega \\ J &= 0.004 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

$$M_N = \frac{P_N}{\omega_N} = \frac{100}{3000 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 0.318 \text{ Nm}$$

- Stan jałowy (bez obciążenia)

$$M_o = 0, \quad i \approx 0,$$

$$U_N = c_s \omega_N \Rightarrow c_s = \frac{U_N}{\omega_N} = \frac{24}{3000 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 0.076 \text{ V/rd/s}$$

- Stan nominalny

$$M_N = k_s I_N \Rightarrow k_s = \frac{M_N}{I_N} = \frac{0.318}{4.17} = 0.076 \text{ Nm/A}$$

Zatem

$$k_s = \frac{M_N}{I_N} = \frac{M_N \omega_N}{I_N \omega_N} = \frac{P_N}{\omega_N I_N} = \frac{U_N I_N}{\omega_N I_N} = \frac{U_N}{\omega_N} = c_s,$$

czyli  $k_s = c_s$ .

$$T = \frac{J R}{c_s k_s} = 0.69 \text{ s}, \quad k = \frac{1}{c_s} = 13.1 \text{ rd/s/V}, \quad k_z = \frac{R}{k_s c_s} = 1.73 \text{ rd/s/Nm}$$

*Wniosek.* Jeżeli napięcie  $U$  zwiększymy o 1V, to obroty wzrosną o 13.1 rd/s.

- Transmitancja silnika względem kąta  $\phi$  (położenie)

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}, \quad \Omega = s \Phi(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)} U(s) - \frac{k_z}{s(Ts + 1)} M_o(s)$$

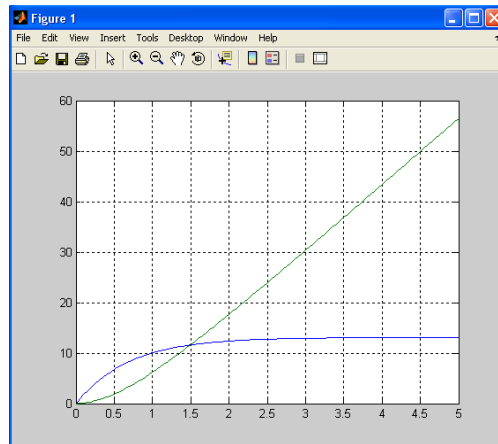
$$\frac{k}{s(Ts + 1)} - \text{transmitancja całkująca z inercją I rzędu}$$

Dla danych z przykładu

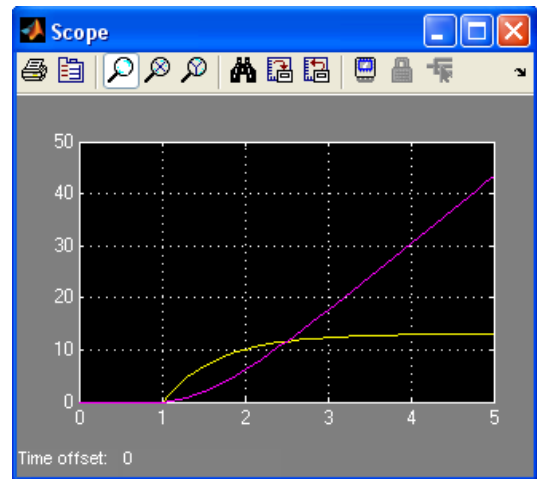
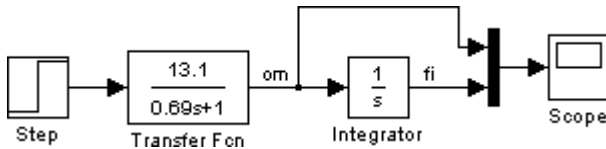
$$\frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{13.1}{s(0.69s+1)}$$

- Matlab

```
l= 13.1
m= [0.69 1]
t= 0:0.05:5;
om= step(l, m, t);
fi= step(l, [m 0], t);
plot(t, om, t, fi), grid
```



- Simulink

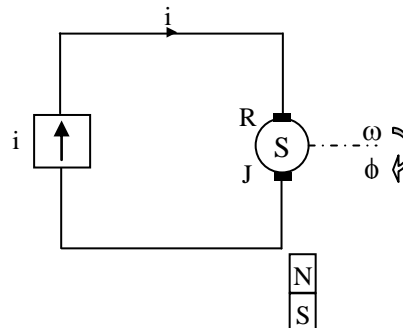


Multiplekser – dwa wykresy w oknie  
*Signal Routing > Mux*

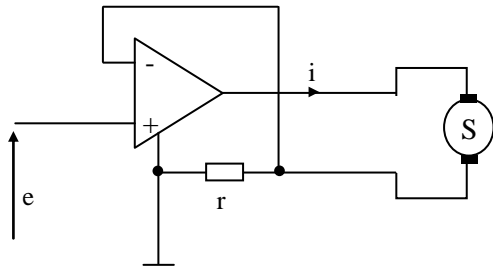
## STEROWANIE PRĄDOWE

### 1. Układ

- Prąd  $i$  jest ustawiany przez sterownik za pośrednictwem wzmacniacza mocy pracującego w układzie źródła prądu.



Regulowanym źródłem prądu jest następujący układ:



$$U_+ - U_- \cong 0$$

$$e - ir \cong 0$$

$$i \approx \frac{1}{r} e$$

Wzmacniacz z prądowym sprzężeniem zwrotnym

## 2. Opis

- Teraz korzysta się tylko z równania momentów

$$\boxed{J \frac{d\omega}{dt} = M_{em} - M_o - D\omega},$$

gdzie  $M_{em} = k_s i$ ,  $D \approx 0$

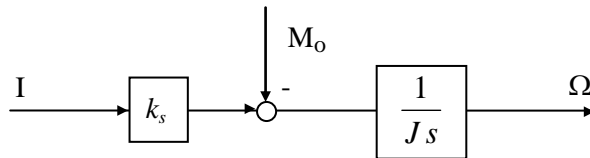
$$J \frac{d\omega}{dt} = k_s i - M_o$$

- Transformacja Laplace'a

$$J s \Omega(s) = k_s I(s) - M_o(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{k_s}{J s} I(s) - \frac{M_o(s)}{J s} \quad - \text{transmitancja całkująca}$$

- Schemat blokowy



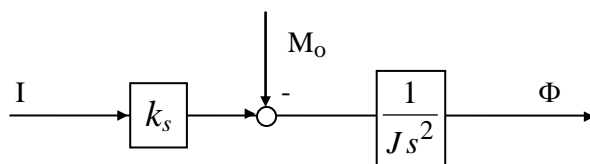
Istnieje szereg obiektów opisanych przez transmitancję całkującą (jak choćby zbiornik zamknięty).

- Położenie  $\phi$

$$\Omega(s) = s \Phi(s),$$

$$\Phi(s) = \frac{k_s}{J s^2} I(s) - \frac{M_o(s)}{J s^2} \quad - \text{transmitancja podwójnie całkująca (podwójny integrator)}$$

- Schemat blokowy



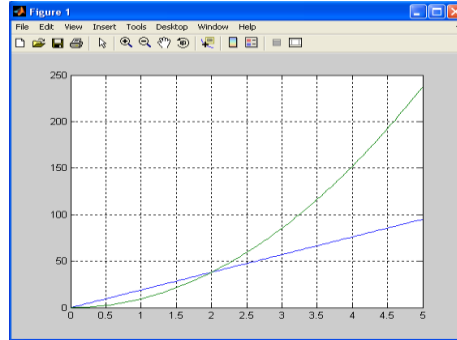
Sterowanie prądowe uważa się za odpowiedniejsze niż sterowanie napięciowe ponieważ podwójne całkowanie zapewnia lepszą dokładność śledzenia zmieniającej się wielkości zadanej. Obecnie jest ono powszechnie stosowane.

Dane z poprzedniego przykładu:

$$\frac{k_s}{J} = \frac{0.076}{0.004} = 19, \quad \frac{\Phi(s)}{I(s)} = \frac{19}{s^2}$$

- Matlab

```
l=19  
m= [1 0]  
t=0:0.05:5;  
om= step(l, m, t);  
fi= step(l, [1 0 0], t);  
plot(t, om, t, fi), grid
```



Chcąc zatrzymać silnik należy zmienić kierunek prądu.

Ogólnie biorąc sterowanie obiektami całkującymi (astatycznymi) wymaga nieco bardziej zaawansowanych algorytmów niż sterowanie obiektami inercyjnymi (statycznymi).