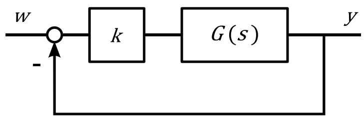
# 5. PROJEKTOWANIE METODĄ LINII PIERWIASTKOWYCH

## Regulator P

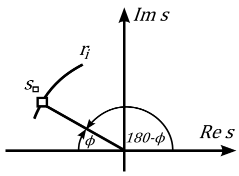
### Problem




– dane: $p_{\%}$, $G(s)$

– szukane: $k$, $t_r$

### Tok projektowania




- $p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi = \dfrac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\frac{p_{\%}}{100}}} \quad \Rightarrow \quad \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$
- Linie pierwiastkowe dla $G(s)$

  Spośród nich wybiera się linię $r_i$ przecinającą prostą nachyloną pod kątem $\phi$ (do „ujemnej” półosi rzeczywistej).
- $s_{\square}$ – punkt przecięcia linii $r_i$ z prostą nachyloną pod kątem $\phi$
- $k = -\dfrac{1}{G(s_{\square})}, \quad t_r = \dfrac{1}{|Re s_{\square}|}$ (5.1)

Matlab

- `k=kmin:Δk:kmax` – wektor wartości wzmocnienia (zwykle około 100 elementów)
- `r=rlocus(L,M,k)` – tablica, której kolumny są liniami pierwiastkowymi $G(s)\left(=\frac{L}{M}\right)$
- `r(:,i)` – i-ta kolumna tablicy $r$ z wartościami w II ćwiartce płaszczyzny (Re s, Im s) odpowiadająca linii $r_i$
- `[k' r(:,i) 180-angle(r(:,i))*180/pi]` – trójkolumnowa tablica, której wiersze zawierają wartości wzmocnienia, odpowiadające im punkty linii $r_i$ oraz kąty nachyleń prostych prowadzących do tych punktów (kąty mierzone od „ujemnej” półosi)

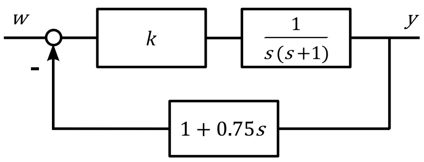
- $k_{\square}$ $s_{\square}$ $\phi$ – wiersz w tablicy trójkolumnowej odpowiadający przecięciu linii $r_i$ z prostą nachyloną pod kątem $\phi$, ponieważ 180-angle($s_{\square}$)*180/pi = $\phi$.

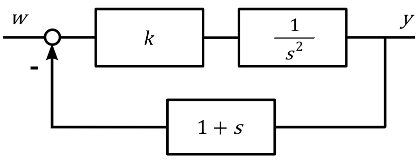
Wartość $k_{\square}$ odczytana z powyższego wiersza jest szukaną wartością wzmocnienia. Czas regulacji $t_r$ oblicza się na podstawie $s_{\square}$.

> *Uwaga.* W praktyce ze względu na wartości wzmocnienia różniące się o krok $\Delta k$, wiersz określający rozwiązanie wybiera się tak, aby kąt 180-angle($s_{\square}$)*180/pi był jak najbliższy $\phi$.

## Przykład

**Z 5.1.** Wyznaczyć linie pierwiastkowe dla serwomechanizmów pokazanych na rysunkach oraz znaleźć wzmocnienia i czasy regulacji dla przebiegów aperiodycznych krytycznych.

a) 


b) 


*Rozwiązanie*

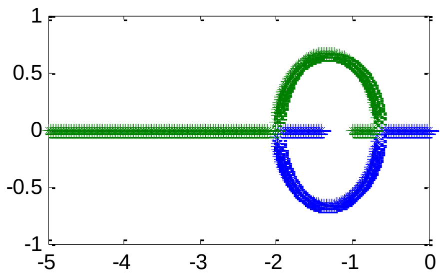
- $p_{\%} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0°$

> *Uwaga.* W przypadku przebiegów aperiodycznych krytycznych wystarczy utworzyć tablicę `[k' r(:,i)]` lub `[k' r]` i wybrać wiersz, w którym wartości linii $r_i$ przechodzą z rzeczywistych na zespolone.

a) $G_{otw}(s) = k\,\frac{1+0.75s}{s(s+1)}$ $\Rightarrow$ bieguny **x:** 0, -1, zero **o:** -4/3

- Matlab

```
L=[0.75 1];
M=[1 1 0];
k=0:0.01:10;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');
```



```
[k' r]

0.4400   -0.6178             -0.7122
0.4500   -0.6687-0.0527i     -0.6687+0.0527i
0.4600   -0.6725-0.0880i     -0.6725+0.0880i
```

$$k = 0.45, \quad s_{\square} = -0.6687 + 0.0527j \cong -0.6687$$

```
3.9900   -1.9963-0.0706i     -1.9963+0.0706i
4.0000   -2.0000             -2.0000
4.0100   -1.9329             -2.0746
```

$$k = 4, \quad s_{\square} = -2$$

- Czas regulacji

  $k = 0.45 \quad \Rightarrow \quad s = -0.6687 + 0.0527j \cong -0.6687$

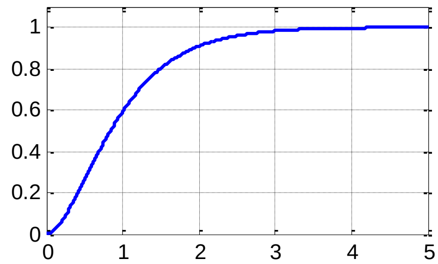
  $$t_r = \frac{4}{0.6687} \cong 5.981$$

  $k = 4 \quad \Rightarrow \quad s = -2 \quad \Rightarrow \quad t_r = \frac{4}{2} = 2$

  Spośród dwóch wzmocnień, dla których uzyskuje się przebiegi aperiodyczne krytyczne należy wybrać $k = 4$ ze względu na trzykrotnie krótszy czas regulacji $t_r = 2$.

- $G_{zam}(s) = \dfrac{\frac{4}{s(s+1)}}{1+\frac{4(1+0.75s)}{s(s+1)}} = \dfrac{4}{s^2+4s+4}$

```
L=4;
M=[1 4 4]
roots(M)
t=0:0.01:5;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```




- Punkty rozwidlenia wyznaczone analitycznie

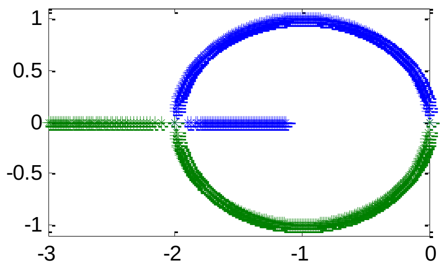
  $$\frac{d}{ds} G_{otw}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1+0.75s}{s(s+1)}\right) = 0$$

$$s(s+1)0.75-(1+0.75s)(2s+1)=0 \quad \Rightarrow \quad 0.75s^2+2s+1=0$$

$s_1=-2, \quad s_2=-\frac{2}{3}$ (ew. `roots([0.75 2 1])`)

b) $G_{otw}(s)=k\frac{s+1}{s^2} \quad \Rightarrow$ **x:** 0, 0, **o:** -1

- 
```
L=[1 1];
M=[1 0 0];
k=0:0.01:10;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');

[k' r]
```

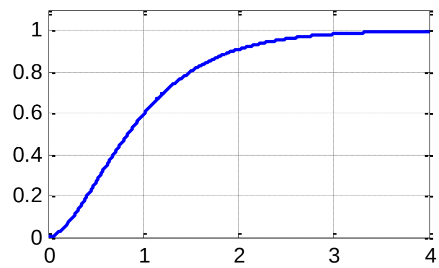



```
3.9900   -1.9950+0.0999i   -1.9950-0.0999i
4.0000   -2.0000           -2.0000
4.0100   -1.9049           -2.1051
```

$k=4 \quad \Rightarrow \quad s=-2 \quad \Rightarrow \quad t_r=\frac{4}{2}\cong 2$

- $G_{zam}(s)=\frac{\frac{4}{s^2}}{1+\frac{4(s+1)}{s^2}}=\frac{4}{s^2+4s+4}$

```
L=4;
M=[1 4 4]
roots(M)
t=0:0.01:4;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```

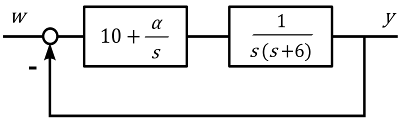



- Punkt rozwidlenia

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s^2}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad s^2-(s+1)2s=0 \quad \Rightarrow \quad s^2+2s=0$$

$s_1=0, \quad s_2=-2$

**Z 5.2.** Dany jest układ z regulatorem PI o transmitancji $10 + \frac{\alpha}{s}$. Dobrać $\alpha$ tak, aby przeregulowanie wynosiło 10%. Jak wygląda odpowiedź skokowa?




> *Wskazówka.* Równanie $1 + G_{otw}(s, \alpha) = 0$ należy przekształcić do postaci $1 + \alpha G'_{otw}(s) = 0$ i przeprowadzić projektowanie dla transmitancji $G'_{otw}(s)$ z $\alpha$ traktowanym jako pseudo-wzmocnienie.

*Rozwiązanie*

- $1 + \left(10 + \frac{\alpha}{s}\right)\frac{1}{s(s+6)} \quad \Rightarrow \quad s^3 + 6s^2 + 10s + \alpha = 0$

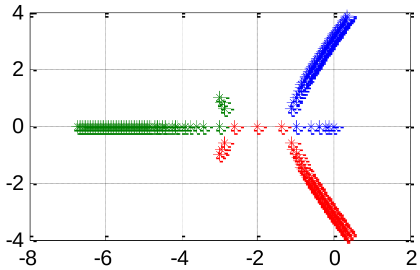
  $$1 + \alpha \underbrace{\frac{1}{s^3+6s^2+10s}}_{G'_{otw}} = 0$$

- $p_{\%} = 10 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{p_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\frac{p_{\%}}{100}}} = 0.5911$

  $$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 53.76°$$

- Matlab

```
L=1;
M=[1 6 10 0];
k=0:1:100;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');grid
roots(M)        0,-3 ±1i
```

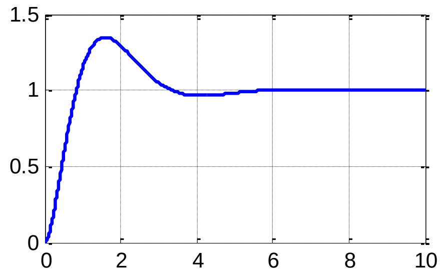



```
[k' r(:,1) 180-angle(r(:,1))*180/pi]

1.0e+002 * [ 0.1000    -0.0091+0.0125i    0.5396]
```

Zatem

$\alpha = 10, \quad s_{\square} = -0.91 + 1.2j, \quad t_r = \frac{4}{0.91} = 4.39$

- ```
  alpha=10
  Lotw=[10 alpha];
  Motw=[1 6 0 0];
  Lzamk=Lotw;
  Mzamk=Motw+[0 0 Lotw];
  t=0:0.01:10;
  y=step(Lzamk,Mzamk,t);
  plot(t,y);grid
  max(y)
  ```
  1.3481 ⇒ 34.81%




- Punkty rozwidlenia

  $$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^3+6s^2+10s}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 3s^2+12s+10=0$$

  $$s_1=-1.18, \quad s_2=-2.81$$

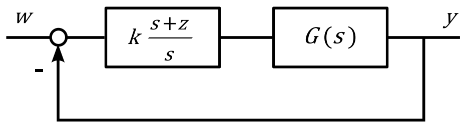
## Regulator PI

$$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)=k_p\frac{s+\frac{1}{T_i}}{s}=k\frac{s+z}{s}\ , \qquad k=k_p, \quad z=\frac{1}{T_i} \tag{5.2}$$

### Problem

– dane: $p_\%$, $G(s)$

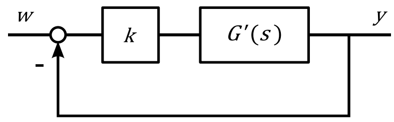
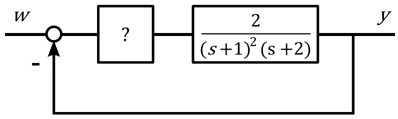
– szukane: $k$, $z$, $t_r$

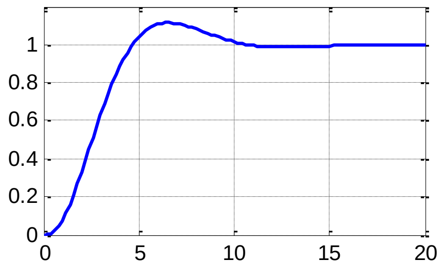
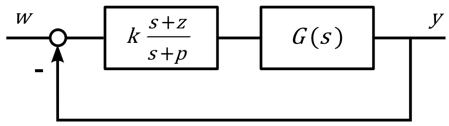
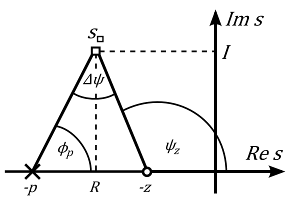



### Tok projektowania

- $p_\% \quad \Rightarrow \quad \xi \quad \Rightarrow \quad \phi$
- Zero $z$ – eliminacja dominującego bieguna (największej stałej czasowej)

  $$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdot\ldots}\ , \qquad p_1\le p_2\le\ \ldots$$

$$\underline{z=p_1} \tag{5.3a}$$
  ```

$$G_{otw}(s) = k\frac{s+p_1}{s}\frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdot\ldots} = k\underbrace{\frac{b(s)}{s(s+p_2)\cdot\ldots}}_{G'(s)} = kG'(s) \tag{5.3b}$$

- Dalej projektowanie prowadzi się jak dla regulatora P z „obiektem" o transmitancji $G'(s)$




**Przykład**

**Z 5.3.** Dobierz najprostszy regulator zapewniający przeregulowanie 12.2% oraz zerowy uchyb ustalony w odpowiedzi na skokową zmianę wartości zadanej.




*Rozwiązanie*

Najprostszym regulatorem, który zapewni zerowy błąd ustalony będzie regulator PI (regulator typu I jest stosowany dla obiektów z dominującym opóźnieniem).

- $p_{\%} = 12.2 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\left|\ln\frac{P_{\%}}{100}\right|}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{P_{\%}}{100}}} = 0.5564$

  $\phi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 56.19°$

- $z = 1$ – eliminacja dominującego bieguna (jednego z dwóch identycznych biegunów)

  $G'(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$

- Matlab

```
L=[0 0 0 2]; M=[1 3 2 0];
k=0:0.01:1; r=rlocus(L,M,k);

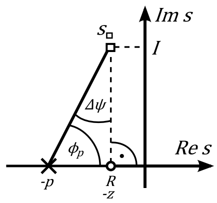
[k' r(:,1) 180-angle(r(:,1))*180/pi]
```

Wiersz z kątem najbliższym $\phi = 56.19°$

```
1.0e+002*[0.0045 -0.0035+0.0052i 0.5601]
```

$k = 0.45, \quad s_{\square} = -0.35 + 0.52j, \quad t_r = \frac{4}{0.35} = 11.4$

- ```
  t=0:0.2:20;
  L=k*L;
  y=step(L,M+L,t);
  plot(t,y);grid
  max(y)
  ```
  $1.115 \Rightarrow 11.5\%$




## Regulator PD

$$k_p\left(1 + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right) = k\frac{s+z}{s+p}\ , \quad k = k_p\frac{p}{z}\ , \quad z = \frac{1}{T_d\left(1+\frac{1}{D}\right)}\ , \quad p = \frac{D}{T_d} \qquad (5.4)$$

*Wyjaśnienie*. Regulator PD zapisywany w postaci $k\frac{s+z}{s+p}$ jest często nazywany korektorem. Dla typowych danych mamy $z < p$. Mówi się wtedy o korektorze przyspieszającym, bo skraca on czas regulacji w stosunku do regulatora P.

**Problem**

– dane: $p_{\%},\ t_r,\ G(s)$

– szukane: $k,\ z,\ p$




### Tok projektowania

- $p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi \quad \Rightarrow \quad \phi$
- $t_r \quad \Rightarrow \quad s_{\square} = \frac{4}{t_r}(-1 + j\mathrm{tg}\phi) = R + jI \qquad (5.5)$

  $R = -\frac{4}{t_r}\ , \quad I = \frac{4}{t_r}\mathrm{tg}\phi$ – punkt docelowy

  *Metoda I* – wybór z na podstawie kąta $\Delta\psi$

- $\Delta\psi = \psi_z - \phi_p =$


  ```

$$= \pm 180° - \measuredangle G(s_{\square}) \quad (\pm 360°) \tag{5.6a}$$

Warunek realizowalności:

$$\measuredangle G(s_{\square}) > \phi \quad \text{lub} \quad \Delta\psi < 180 - \phi \tag{5.6b}$$

a) $\Delta\psi < 90°$

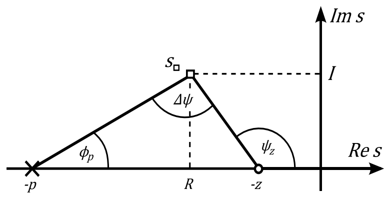



- $z = \frac{4}{t_r} = |R|$ – zero z pod punktem $s_{\square}$ (5.6c)

  („pionowo w dół”), $\psi_z = 90°$
- $p = z + I\ \mathrm{tg}\Delta\psi$ lub $p = z + I\mathrm{ctg}\phi_p$, (5.6d)

  gdzie $\phi_p = 90° - \Delta\psi$
- $k = -\frac{s+p}{s+z}\frac{1}{G(s)}\Big|_{s=s_{\square}}$ (5.6e)

b) $90° \leq \Delta\psi < 180° - \phi$



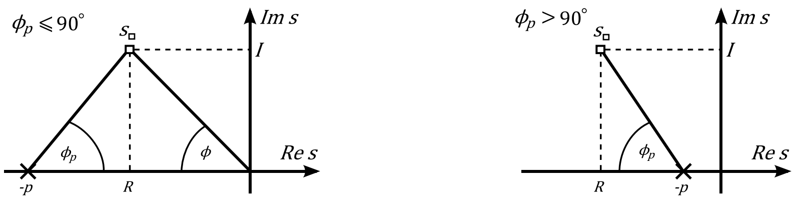

- $\psi_z > \Delta\psi$ – wybór arbitralny
- $z = |R| - I\ \mathrm{tg}(\psi_z - 90°)$
- $p = |R| + I\ \mathrm{tg}(\Delta\psi + 90° - \psi_z)$
- $k -$ jak wyżej

*Metoda II* – eliminacja dominującego bieguna

- $z = p_1$ (5.7a)

$$G_{otw}(s) = k\frac{s+p_1}{s+p}\frac{b(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdot\ldots} = k\frac{1}{s+p}\underbrace{\frac{b(s)}{(s+p_2)\cdot\ldots}}_{G'(s)} \tag{5.7b}$$

- $\phi_p = \pm 180° + \measuredangle G'(s_{\square}) \quad (\pm 360°)$ (5.7c)



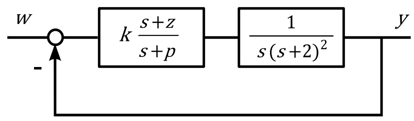

Warunek realizowalności: $\qquad \phi_p < 180^\circ - \phi$

- $p = |R| + I\ \text{ctg}\phi_p \quad$ lub $\quad p = |R| - I\ \text{ctg}(180^\circ - \phi_p)$ (5.7d)
- $k = -\left.\frac{s+p}{G\prime(s)}\right|_{s=s_\square}$ (5.7e)

*Uwaga.* Rozwiązania uzyskane metodami I i II zazwyczaj nieco się różnią. Jeżeli rozwiązanie uzyskane metodą I musi spełniać warunek $z < p_1$, to metoda II nie daje wtedy rozwiązania (potrzebny byłby korektor podwójny, zob. dalej). Praktycznie oznacza to, że metodą I udaje się uzyskać krótszy czas regulacji.

**Przykład**

**Z 5.4.** Układ automatyki ma postać jak na rysunku. Należy dobrać korektor $D(s) = k\frac{s+z}{s+p}$ tak, aby w układzie zamkniętym przeregulowanie było mniejsze od 20%, a czas narastania mniejszy od 1 sekundy.




*Wskazówka.* W ciągu czasu narastania $t_n$ odpowiedź skokowa rośnie od 10 do 90%. Dla standardowego układu II rzędu czas ten szacuje się jako $t_n \cong \frac{1.8}{\omega_n}$.

*Rozwiązanie*

- Wobec $p_{\%} < 20$ można dla ułatwienia przyjąć $p_{\%} = 16.3$, bo wtedy $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \phi = 60^\circ$.
- $t_n = \frac{1.8}{\omega_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_n > 1.8$. Można wybrać np. $\omega_n = 2$.

Wtedy $t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.5 \cdot 2} = 4$

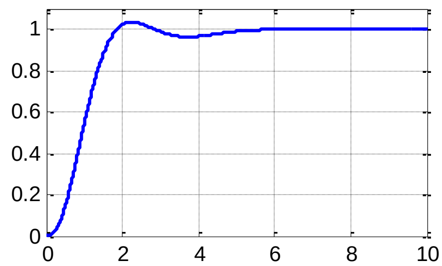
*Metoda I* – $z$ na podstawie $\Delta\psi$

```
s=-1+sqrt(-3);
G=1/(s*(s+2)^2)                 -0.0625+0.1083i
angle(G)*180/pi                 120
dpsi=180-angle(G)*180/pi        60
```

Ponieważ $\Delta\psi = 60 < 90°$, więc $z = \frac{4}{t_r} = \frac{4}{4} = 1$ – $z$ pod $s_{\square}$ („pionowo w dół”)

```
z=1;
p=z+imag(s)*tan(dpsi*pi/180)     4
k=-(s+p)/(s+z)*1/G
k=real(k);
t=0:0.01:10;
L=[0 0 0 1]
M=[1 4 4 0]
L=k*conv([1 z],L);
M=conv([1 p],M);
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

$D(s) = 16\frac{s+1}{s+4}$




max(y) 1.036 ⇒ 3.6%

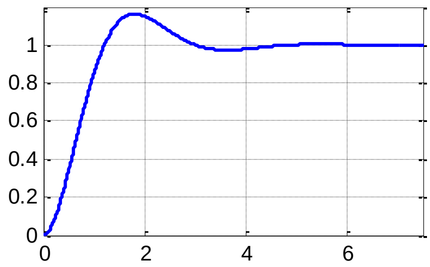
*Metoda II* – eliminacja dominującego bieguna

```
z=2; Gp=(s+z)*G
Gp=(s+z)*G                 -0.2500 - 0.0000i
fip=180-angle(Gp)*180/pi   0°
```

Po wprowadzeniu zera $z$ do transmitancji układu otwartego punkt $s_{\square}$ znajduje się na liniach pierwiastkowych. Można więc zastosować regulator PD postaci $k_p(1 + T_d s) = k(s + z)$, gdzie $k = k_p T_d$, $z = \frac{1}{T_d}$, bądź korektor podwójny $k\left(\frac{s+z}{s+p}\right)^2$.

Rozwiązanie dla regulatora PD podano poniżej, a dla korektora podwójnego dalej.

```
k=-1/Gp
k=real(k);              4
t=0:0.01:10;
L=[0  0  1]
M=[1  4  4  0]
L=k*conv([1  z],L);
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
max(y)       1.1630 ⇒ 16.3%
```




## Regulator PID

### I. PID jako PI×PD

$$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d}{D}s+1}\right)=k\,\frac{s+z_1}{s}\,\frac{s+z}{s+p}=\underbrace{\frac{s+z_1}{s}}_{\text{PI}}\cdot\underbrace{k\,\frac{s+z}{s+p}}_{\text{PD}} \tag{5.8a}$$

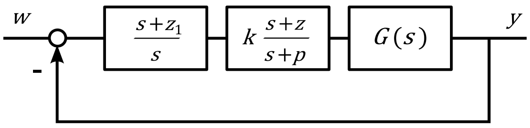
dla $\left(T_i+\frac{T_d}{D}\right)^2 \geq kT_iT_d\left(1+\frac{1}{D}\right)$, gdzie $k=k_p(D+1)$,

$$z_1+z_2=\frac{T_i+\frac{T_d}{D}}{T_iT_d\left(1+\frac{1}{D}\right)}\,,\qquad z_1z_2=\frac{1}{T_iT_d\left(1+\frac{1}{D}\right)}\,,\qquad p=\frac{D}{T_d} \tag{5.8b}$$

**Problem**

– dane: $p_{\%},\ t_r,\ G(s)$

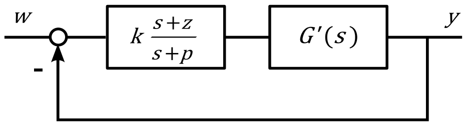
– szukane: $k,\ z_1,\ z,\ p$




**Tok projektowania**

- PI – eliminacja dominującego bieguna: $z_1=p_1$ (5.8c)

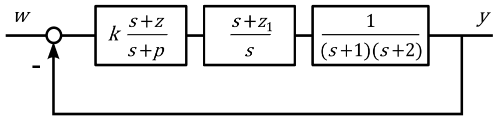
  Po eliminacji układ wygląda następująco:




$$G'(s) = \frac{b(s)}{s(s+p_2)\cdot\ldots}$$

- PD – projektowanie dla „obiektu” o transmitancji $G'(s)$

## Przykład




**Z 5.5.** Dla obiektu opisanego transmitancją $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ należy dobrać regulator PID jako PI×PD tak, aby uzyskać przeregulowanie 16.3% i czas regulacji 3 sekundy.

*Rozwiązanie*

PI: $z_1 = 1, \quad G'(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

PD: $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \phi = 60°$

$t_r = 3 \quad \Rightarrow \quad s_{\square} = \frac{4}{3}\left(-1 + j\sqrt{3}\right)$

- *Metoda I* – *z* na podstawie $\Delta\psi$

```
s=4/3*(-1+sqrt(-3)); fi=60; Gprim=1/(s*(s+2));
```

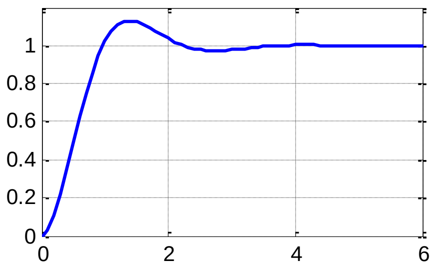
| | |
|---|---|
| `angle(Gprim)*180/pi` | 166.11 |
| `dpsi=180-angle(Gprim)*180/pi` | 13.89 |
| `z=abs(real(s))` | 1.333 |
| `I=imag(s)` | 2.3094 |
| `p=z+I*tan(dpsi*pi/180)` | 1.9048 |
| `k=-(s+p)/((s+z)*Gprim)` | $k = 6.6032 + 0.000$i |
| `k=real(k)` | $k = 6.6032$ |

```
L=[0 0 1]
M=[1 2 0]
L=k*conv([1 z],L);
M=conv([1 p],M);
t=0:0.1:10;
```

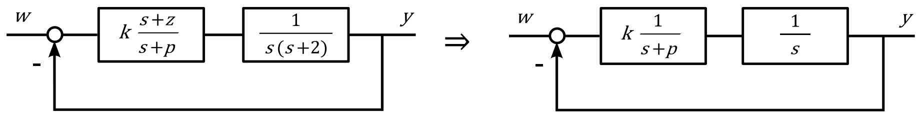
```
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

1.1307 ⇒ 13.07%

PID: $6.6\frac{s+1}{s}\cdot\frac{s+1.333}{s+1.9047}$




- *Metoda II* – eliminacja dominującego bieguna



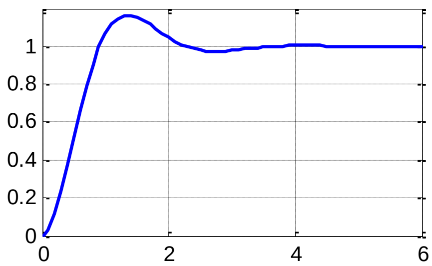

```
z=2; Gpp=1/s;
fip=180+angle(Gpp)*180/pi                60
p=abs(real(s))+imag(s)/tan(fip*pi/180)   2.667
k=-(s+p)/Gpp
k=real(k)
```

$k = 7.1111 - 0.000\mathrm{i}$

$k = 7.1111$

```
L=[0 0 1];
M=[1 2 0];
L=k*conv([1 z],L);
M=conv([1 p],M);
t=0:0.1:10;
y=step(L,L+M,t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

1.1622 ⇒ 16.22%




PID: $7.11\frac{s+1}{s}\cdot\frac{s+2}{s+2.667}$

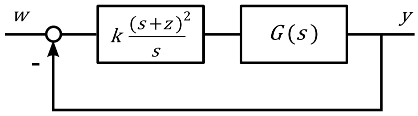
## II. PID „o podwójnym zerze”

$$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{\frac{T_d s}{D}s+1}\right) \underset{D\gg1}{\Longrightarrow} k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)=k\frac{(s+z)^2}{s} \qquad (5.9a)$$

$$k = k_p \frac{T_i}{4}, \quad T_d = \frac{T_i}{4}, \quad z = \frac{2}{T_i} \tag{5.9b}$$

*Wyjaśnienie.* Warunek $D \gg 1$ w praktyce sprowadza się do $D \geq 4$.

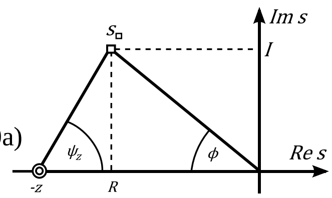
**Problem**




– dane: $p_{\%},\ t_r,\ G(s)$

– szukane: $k,\ z$

**Tok projektowania**



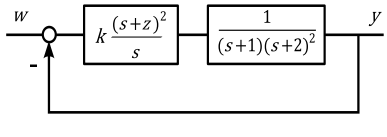

- $p_{\%} \quad \Rightarrow \quad \xi \quad \Rightarrow \quad \phi$
- $t_r \quad \Rightarrow \quad s_\square = \frac{4}{t_r}(-1 + j\mathrm{tg}\phi) = R + jI$
- $\psi_z = \frac{1}{2}(-\measuredangle G(s_\square) - \phi) \quad (\pm 180°)$ (5.10a)
- $z = |R| + \frac{I}{\mathrm{tg}\psi_z}$ (5.10b)
- $k = -\frac{s}{(s+z)^2} \frac{1}{G(s)}\Big|_{s=s_\square}$ (5.10c)

*Uwaga.* Takie same wyniki dają następujące wzory:

$$G'(s) = \frac{G(s)}{s}, \quad \psi_z = \frac{1}{2}\left(\pm 180° - \measuredangle G'(s_\square)\right), \quad z = |R| + \frac{I}{\mathrm{tg}\psi_z}$$

$$k = -\frac{1}{(s+z)^2} \frac{1}{G'(s_\square)}$$

**Przykład**



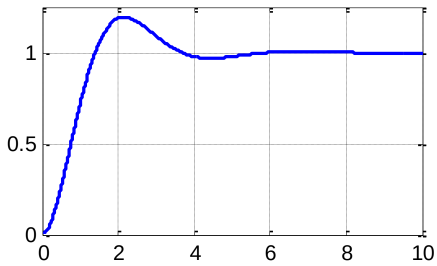

**Z 5.6.** Dla obiektu $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$ należy dobrać regulator PID „o podwójnym zerze” $k\frac{(s+z)^2}{s}$ tak, aby uzyskać przeregulowanie 16.3% i czas regulacji 5 sekund.

*Rozwiązanie*

- $p_{\%} = 16.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \phi = 60^\circ$
- $t_r = 5 \quad \Rightarrow \quad s_\square = \frac{4}{5}\left(-1 + j\sqrt{3}\right)$
- Matlab

```
fi=60; s=4/5*(-1+sqrt(-3)); R=real(s); I=imag(s);
G=1/((s+1)*(s+2)^2)                       -0.2126-0.000i
psiz=0.5*(-angle(G)*180/pi-fi)            60
z=abs(R)+I/tan(psiz*pi/180)               1.6
k=-s/((s+z)^2*G)                          k = 2.9400 + 0.000i
k=real(k)                                 k = 2.9400
```

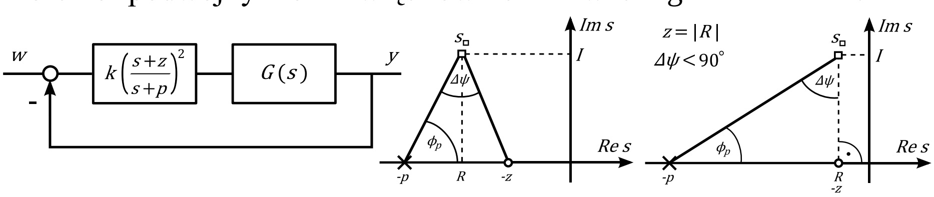
```
L=k*conv([1 z],[1 z]);
M=[conv([1,1],
        [1 4 4]) 0];
t=0:0.01:10;
y=step(L,M+[0 0 L],t);
plot(t,y);grid
max(y)       1.1940 ⇒ 19.4%
```




PID: $2.94\frac{(s+1.6)^2}{s} = 9.408\left(1 + \frac{1}{1.25s} + 0.3125s\right)$

## Korektor podwójny $k\left(\frac{s+z}{s+p}\right)^2$

Jest stosowany, gdy wymaga się szczególnie krótkiego czasu regulacji $t_r$. Typową realizacją jest szeregowe połączenie dwu regulatorów PD. Korektor podwójny można więc również nazwać regulatorem PD$^2$.




- W metodzie I modyfikacji ulegają dwa wzory

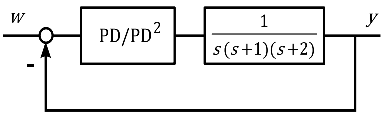
$$\Delta\psi = \frac{1}{2}\left(\pm 180^\circ - \measuredangle G(s_{\square})\right) \quad (\pm 180^\circ), \qquad k = -\left(\frac{s+p}{s+z}\right)^2 \frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=s_{\square}} \tag{5.11a}$$

- W metodzie II eliminuje się dwa bieguny korektorem postaci $k\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p)^2}$. Wtedy

$$\phi_p = \frac{1}{2}\left(\pm 180^\circ + \measuredangle G'(s_{\square})\right) \quad (\pm 180^\circ), \qquad k = -\frac{(s+p)^2}{G'(s)}\bigg|_{s=s_{\square}} \tag{5.11b}$$

Nieco krótsze czasy realizacji udaje się uzyskać metodą I.

**Przykład**




**Z 5.7.** Dla obiektu $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ należy dobrać regulator PD lub PD$^2$, tak aby uzyskać przeregulowanie 4.3% i czas regulacji 3 sekundy.

*Rozwiązanie*

- $p_{\%} = 4.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.7 \quad \Rightarrow \quad \phi = 45^\circ$
- $t_r = 3 \quad \Rightarrow \quad s_{\square} = \frac{4}{3}(-1 + j1)$
- Próba zastosowania korektora pojedynczego $k\frac{s+z}{s+p}$

```
s=4/3*(-1+sqrt(-1))
G=1/(s*(s+1)*(s+2))                  0.1390+0.218i
dpsi=180-angle(G)*180/pi             122.47
```

*Wniosek*. Ponieważ $\Delta\psi = 122.47^\circ > 90^\circ$, więc korektor $k\frac{s+z}{s+p}$ przy wyborze $z = |Res_{\square}|$ („pionowo w dół”) nie jest w stanie spełnić wymagań projektowych.

- 
```
dpsi2=dpsi/2                         61.23
z=abs(real(s))                       1.3333
I=imag(s)                            1.3333
p=z+I*tan(dpsi2*pi/180)              3.7622
```

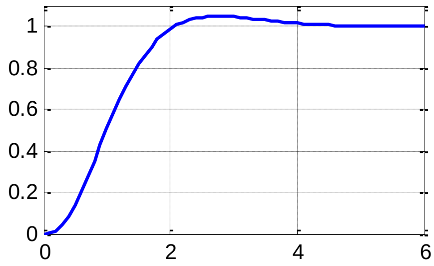
```
k=-((s+p)/(s+z))^2*1/G
k=real(k)
```

$k = 16.6833 + 0.000\mathrm{i}$

$k = 16.6833$

```
L=k*conv([1 z],[1 z]);
M=conv([1 2*p p^2],
       [1 3 2 0]);
t=0:0.1:6;
y=step(L,
      M+[0 0 0 L],t);
plot(t,y);grid
max(y)
```

1.0489 ⇒ 4.89%




## Układy z opóźnieniem

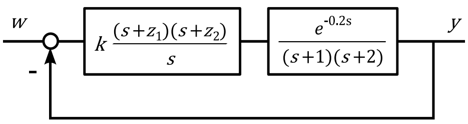
Projektowanie przeprowadza się zastępując opóźnienie przybliżeniem Padé I stopnia, tj.

$$e^{-\tau s} \cong \frac{-\frac{\tau}{2}s+1}{\frac{\tau}{2}s+1} \tag{5.12}$$

Następnie, w zależności od danych i ew. wymaganego typu regulatora, wybiera się jeden z przypadków przedstawionych wyżej. Do sterowania obiektami z opóźnieniem służą regulatory P, I, PI, PID, ale raczej nie PD. Symulacje przeprowadza się dla aproksymacji Padé wysokiego stopnia, np. 7…10.

### Przykład

**Z 5.8.** Dla układu pokazanego obok dobrać nastawy regulatora PID tak, aby uzyskać przeregulowanie 4.3%.

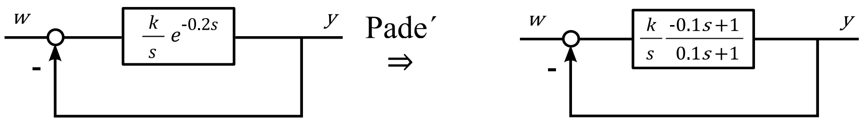



*Rozwiązanie*

$$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)=k\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s} \quad \text{dla } T_d \le \frac{T_i}{4}$$

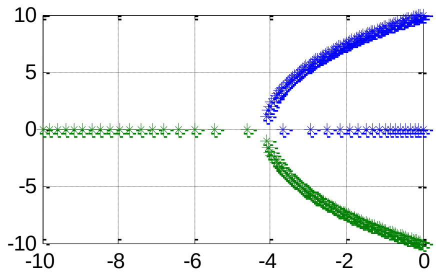
$$z_{1,2}=\frac{1}{2T_d}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{4T_d}{T_i}}\right)$$

- Ponieważ dane jest tylko $p_{\%}$, a nie także $t_r$, więc $z_1$, $z_2$ można dobrać eliminując obydwa bieguny obiektu, tzn. $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.




- $p_{\%} = 4.3 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \phi = 45°$

- 
```
[Lp,Mp]=pade(0.2,1);
L=[0 Lp];
M=[Mp 0];
k=0:0.1:10;
r=rlocus(L,M,k);
plot(r,'*');grid
```




`r` – kolumna (r:,1) w II ćwiartce

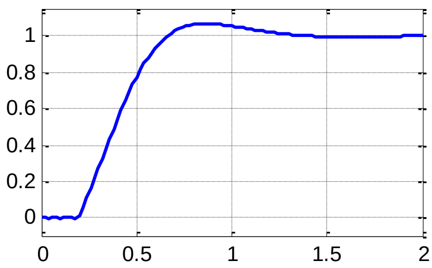
```
[k' r(:,1) 180-angle(r(:,1))*180/pi]

1.0e+002 *
   0.0260   -0.0370+0.0351i   0.4348
   0.0270   -0.0365+0.0370i   0.4538
   0.0280   -0.0360+0.0388i   0.4713
```

$k = 2.7$

$s = -3.65 + 3.7j$

$45.38\,° \cong 45°$

$t_r = \frac{4}{3.65} = 1.0959$




```
k=2.7
[Lp, Mp]=pade(0.2,8);
L=k*Lp;
```

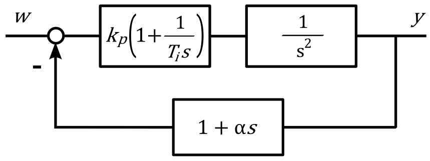
```
M=[Mp 0];
t=0:0.02:2;
y=step(L,M+[0 L],t);
plot(t,y);grid
max(y)       1.0683 ⇒ 6.83%
```

PID: $2.7\frac{(s+1)(s+2)}{s} \quad \Rightarrow \quad 5.4\left(1+\frac{1}{1.5s}+0.333s\right)$

## Sterowanie podwójnym integratorem

### Serwomechanizm ze sterowaniem prądowym

Struktura zawiera regulator PI w torze głównym i PD w torze sprzężenia.




**Problem**

– dane: $p_{\%}=0,\ t_r$

– szukane: $k_p,\ T_i,\ \alpha$

Chodzi zatem o uzyskanie przebiegów aperiodycznych krytycznych o zadanym czasie regulacji.

*Wzory projektowe*

- $\alpha = T_i$ – PI i PD tworzą teraz odpowiednik regulatora PID „o podwójnym zerze"

  $G_{otw}(s) = k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)(1+\alpha s)\frac{1}{s^2} \underset{\alpha=T_i}{\Longrightarrow} k\frac{(s+z)^2}{s^3}, \quad k=k_pT_i, \quad z=\frac{1}{T_i}$

- $z=\frac{4}{t_r}\ , \quad k=\frac{27}{4}z$ (5.13)

**Przykład**

Dane $t_r = 0.4$

- $t_r = 0.4 \ \Rightarrow \ z=10 \ \Rightarrow \ k=\frac{27}{4}\cdot 10, \quad T_i = 0.1, \quad k_p=\frac{27}{4}\cdot 100$

- $G_{zam}(s) = \dfrac{k_p \frac{T_i s+1}{T_i s} \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + k_p \frac{T_i s+1}{T_i s} \cdot (1+\alpha s) \frac{1}{s^2}}$

$$G_{zam}(s)|_{\alpha = T_i} = \frac{1}{T_i s + 1} \cdot \frac{k \frac{(s+z)^2}{s}}{1 + k \frac{(s+z)^2}{s}} \underset{k = \frac{27}{4} z}{\Longrightarrow} \frac{z}{s+z} \cdot \frac{\frac{27}{4} z (s+z)^2}{s^3 + \frac{27}{4} z (s+z)^2}$$

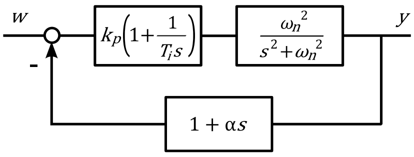
Pierwiastkami równania charakterystycznego $s^3 + \frac{27}{4} z (s+z)^2 = 0$ są $-3z$, $-3z$ oraz $-\frac{3}{4} z$.

Zatem $G_{zam}(s) = \frac{27}{4} z^2 \dfrac{s+z}{(s+3z)^2 \left(s + \frac{3}{4} z\right)}$

**Ramię robota skierowane ku dołowi**

$$G_{obiekt}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \underset{\xi < 1}{\Longrightarrow} \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}\ , \quad \omega \triangleq \omega_n$$

Stosując przybliżenie $\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \cong \frac{\omega^2}{s^2}$ można wykorzystać wzory dotyczące serwomechanizmu ze sterowaniem prądowym, czyli:

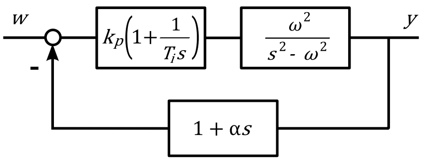



$$\alpha = T_i, \quad z = \frac{4}{t_r}, \quad k = \frac{27}{4} z, \quad T_i = \frac{1}{z}, \quad k_p = \frac{k}{T_i \omega^2} \tag{5.14}$$

**Ramię robota skierowane ku górze**

– dane: $p_{\%} = 0,\ t_r,\ \omega$

– szukane: $k_p,\ T_i,\ \alpha$




$$G_{otw}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) (1 + \alpha s) \frac{\omega^2}{s^2 - \omega^2} =$$

$$= k_p \alpha \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \left(s + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\omega^2}{(s-\omega)(s+\omega)} = k\ \frac{(s+z_1)(s+z)}{s}\ \frac{1}{(s-\omega)(s+\omega)}$$

$$k = k_p \alpha \omega^2, \quad z_1 = \frac{1}{T_i}\ , \quad z = \frac{1}{\alpha}$$

### Tok projektowania

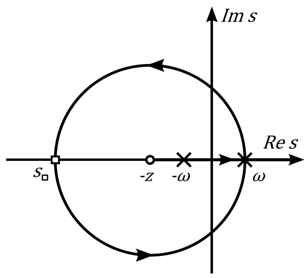
- $z_1 = \omega$ – eliminacja bieguna leżącego w lewej półpłaszczyźnie

  $G_{otw}(s) = k\frac{s+z}{s(s-\omega)}$

- $z + \sqrt{z(z+\omega)} = \frac{4}{t_r} \quad \Rightarrow \quad z$ – wyznaczenie $z$ rozwiązując równanie (Matlab) (5.15)

- $s_{\square} = -z - \sqrt{z(z+\omega)}$ – punkt rozwidlenia

- $k = -\frac{s(s-\omega)}{s+z}\Big|_{s=s_{\square}}$




**Przykład**

Dane: $\omega = 1, \quad t_r = 2$

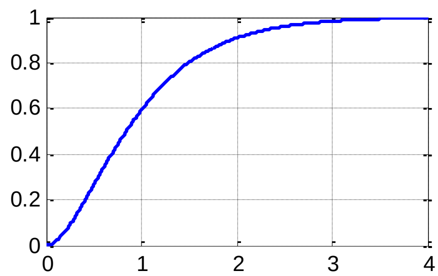
$z + \sqrt{z(z+1)} = 2$ – równanie dla $z$

Matlab – rozwiązanie przez utworzenie tablicy wartości lewej strony równania i wybór wiersza, gdy jest ona równa prawej.

```
z=0.5:0.001:1;
[z' (z+sqrt(z.*(z+1)))']

0.8      2.00
```

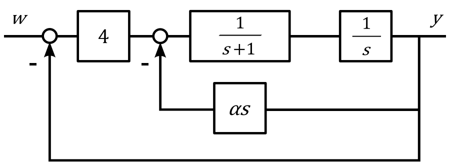
$z = 0.8 \quad \Rightarrow \quad s_{\square} = -2$

$k = -\frac{(-2)(-2-1)}{-2+0.8} = 5$




## Zadania domowe

**D 5.1.** Dany jest serwo-mechanizm pokazany na rysunku. Wykreślić linie pierwiastkowe



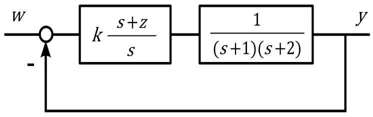
względem współczynnika sprzężenia tachometrycznego $\alpha$. Dla jakiego $\alpha$ uzyskuje się przebiegi aperiodyczne krytyczne? Po jakim czasie odpowiedź skokowa ustali się z dokładnością 1%?

> *Wskazówka.* Czas regulacji odpowiadający ustaleniu odpowiedzi z dokładnością 1% jest dany wzorem $t_r = \frac{4.6}{\xi\omega_n}$.

*Odp.*: $\alpha = 3, \quad t_r = 2.3$

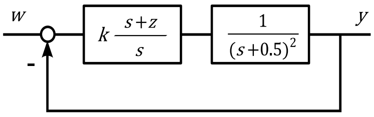
**D 5.2.** Dla układu pokazanego na rysunku dobrać nastawy $k$, $z$ regulatora PI, aby uzyskać odpowiedź skokową o danym przeregulowaniu. Jaki będzie wtedy czas regulacji i faktyczne przeregulowanie?

a) $p_{\%} = 16.3$



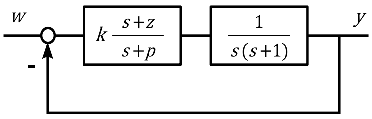

*Odp.*: PI: $4\,\frac{s+1}{s}$, $\quad t_r = 4, \quad \max(y) = 1.1630 \quad \Rightarrow \quad 16.3\%$

b) $p_{\%} = 4.3$




*Odp.*: PI: $0.13\,\frac{s+0.5}{s}$, $\quad t_r = 16, \quad \max(y) = 1.0486 \quad \Rightarrow \quad 4.8\%$

**D 5.3.** Dobrać nastawy $k$, $z$, $p$ korektora PD zapewniającego zadane przeregulowanie $p_{\%}$ i czas regulacji $t_r$.



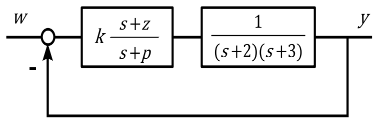

a) $p_{\%} = 4.3, \quad t_r = 4$

*Odp.*: PD: $2\,\frac{s+1}{s+2}$

$\max(y) = 1.043 \Rightarrow 4.3\%$ – metoda I (kąt $\Delta\psi$) i metoda II (eliminacja bieguna) dają w tym przypadku jednakowe rozwiązania.

b) $p_{\%} = 4.3, \quad t_r = 1$

Ile wynosi ustalona wartość wyjścia $y$, jeżeli $w$ jest skokiem jednostkowym?

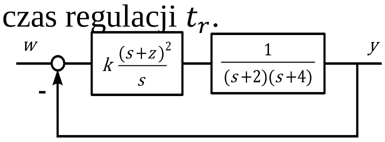



*Wskazówka.* $y_u = 1 - e_u, \quad e_u = \lim_{s\to 0} G_{otw}(s)$

*Odp.*: PD: $24.29\frac{s+4}{s+7.43}, \quad \max(y) = 0.7270, \quad y_u = 0.6855$

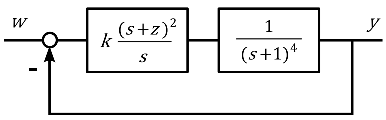
**D 5.4.** Dobrać nastawy $k$, $z$ regulatora PID „o podwójnym zerze" zapewniające dane przeregulowanie $p_{\%}$ i czas regulacji $t_r$.

a) $p_{\%} = 4.3, \quad t_r = 2$



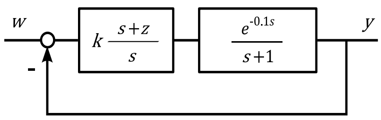

*Odp.*: PID: $2\frac{(s+4)^2}{s}, \quad \max(y) = 1.0670 \quad \Rightarrow \quad 6.7\%$

b) $p_{\%} = 16.3, \quad t_r = 10$



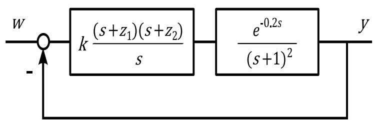

*Odp.*: PID: $1.014\frac{(s+0.6769)^2}{s}, \quad \max(y) = 1.0887 \quad \Rightarrow \quad 8.8\%$

**D 5.5.** Dobrać nastawy regulatora PI zapewniające przebiegi aperiodyczne krytyczne. Jaki będzie wtedy czas regulacji?

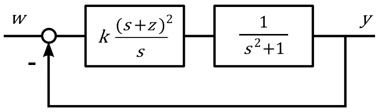



*Odp.*: PI: $3.43\frac{s+1}{s}, \quad t_r = 0.48$

**D 5.6.** Jakie nastawy $k$, $z_1$, $z_2$ powinien mieć regulator PID, aby uzyskać przeregulowanie 4.3%? Jaki będzie wtedy czas regulacji?

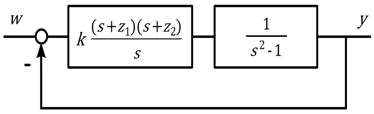



*Odp.*: PID: $2.7\frac{(s+1)^2}{s}, \quad t_r = 1.09$




**D 5.7.** Regulator PID „o podwójnym zerze" steruje oscylatorem w układzie pokazanym na rysunku. Dobierz nastawy *k*, *z* tak, aby uzyskać przebiegi aperiodyczne krytyczne, a czas regulacji wynosił 3. Ile wynosi rzeczywisty czas regulacji i przeregulowanie?

*Odp.*: PID: $9\frac{(s+1.33)^2}{s}$, $t_r = 2.3,$ $\max(y) = 1.1563 \Rightarrow 15.6\%$




**D 5.8.** Ramię robota skierowanego ku górze jest sterowane przez regulator PID. Dobierz nastawy $k$, $z_1$, $z_2$ tak, aby uzyskać przebiegi aperiodyczne krytyczne o czasie regulacji 0.25 sekundy.

*Odp.:* PID: $38\frac{(s+1)(s+9)}{s}$