

2. MODELE OBIEKTÓW STEROWANIA

Równania bilansowe

Bilans masy

Bilans ten dotyczy wszelkich obiektów z przepływem cieczy, gazów, par, materiałów sypkich, takich jak zbiorniki, mieszalniki, kotły, reaktory itp. Masę cieczy zawartą w zbiorniku wyraża wzór

$$M = V\rho = Ah\rho, \quad (2.1)$$

gdzie:

M – masa cieczy, A – powierzchnia przekroju zbiornika,
 V – objętość, h – wysokość słupa cieczy,
 ρ – gęstość.

Równanie bilansu masy cieczy w zbiorniku ma postać

$$\frac{dM}{dt} = A\rho \frac{dh}{dt} = \sum_i q_i \rho_i - \sum_j q_j \rho_j,$$

gdzie:

q_i – dopływ, q_j – odpływ, np. w $[m^3/s]$.

Bilans energii

Na podstawie bilansu energii tworzone są modele matematyczne pieców, suszarni, reaktorów, wymienników, podgrzewaczy itp. Energię zapisuje się jako:

$$E = McT, \quad (2.2)$$

gdzie:

E – energia, c – ciepło właściwe,
 M – masa ($M = V\rho$), T – temperatura.

Równanie bilansu energii cieczy zawartej w zbiorniku można przedstawić jako

2. Modele obiektów sterowania

$$\frac{dE}{dt} = V\rho c \frac{dT}{dt} = \sum_i q_i \rho_i c_i T_i - \sum_j q_j \rho_j c_j T_j \pm \Delta P,$$

gdzie:

V – objętość cieczy, ρ – gęstość,

ΔP – moc doprowadzona lub odprowadzona (\pm).

Bilans momentów

Bilans ten, inaczej zasada d'Alemberta, służy do tworzenia modeli silników, robotów, urządzeń mechatronicznych, pojazdów itp. W odniesieniu do silników elektrycznych bilans momentów ma postać

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{em} - M_o - D\omega, \quad (2.3)$$

gdzie:

J – moment bezwładności, M_o – moment obciążenia,

ω – prędkość kątowna, M_{em} – moment elektromagnetyczny,

D – współczynnik tarcia.

W przypadku silników prądu stałego korzysta się jeszcze ze wzorów:

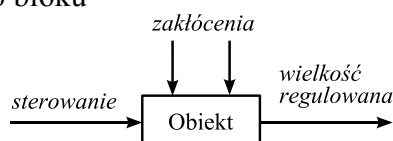
$$SEM = c_s \omega - \text{siła elektromotoryczna}, \quad M_{em} = k_s i \quad (2.4)$$

Tryb tworzenia modelu

- Zapis ogólnego modelu dynamiki obiektu na podstawie odpowiedniego równania bilansowego i ew. dodatkowych zależności. Model ogólny jest równaniem różniczkowym, zwykle nieliniowym.
- Utworzenie modelu statyki obiektu dla stanu nominalnego (średniego) przez pominięcie pochodnej w równaniu ogólnym. Wyznaczenie brakującego parametru modelu na podstawie danych stanu nominalnego (np. stopnia otwarcia zaworu, przepływu, rezystancji itp.).
- Linearyzacja ogólnego modelu dynamiki wokół stanu nominalnego przez rozwinięcie Taylora 1-go rzędu. Otrzymuje się liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach określające zmiany stanu (przyrosty).

- Transformacja Laplace'a modelu zlinearyzowanego oraz wyznaczenie transmitancji wielkości regulowanej względem sterowania oraz ew. transmitancji względem zakłócenia (zasada superpozycji).

Z punktu widzenia sterowania korzystnie jest przedstawić obiekt w postaci następującego bloku



Uwaga. W skrypcie *Teoria sterowania* (L. Trybus) podane są przykłady tworzenia modeli następujących obiektów:

- zbiornik z pompą opóźniającą,
- zbiornik z wypływem pod ciśnieniem hydrostatycznym (własnym),
- przepływowy podgrzewacz elektryczny,
- silnik prądu stałego sterowany napięciowo lub prądowo.

Podano również w jaki sposób należy uwzględnić opóźnienie.

Przykłady

Z 2.1. Mieszanie roztworów

Do mieszalnika pokazanego na rysunku dwie pompy tłoczą roztwory o różnych stężeniach celem uzyskania roztworu o stężeniu pośrednim. Oznaczenia są następujące: c_1, c_2 – stężenia wejściowe [$kmol/m^3$], q_1, q_2 – dopływy [m^3/s], V – objętość roztworu w mieszalniku [m^3]. Dane stanu nominalnego:

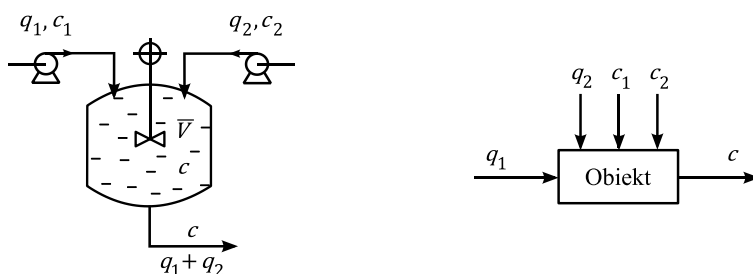
$$\bar{c}_1 = 1, \quad \bar{c}_2 = 2, \quad \bar{q}_1 = 0.015, \quad \bar{q}_2 = 0.005, \quad V = 1$$

Jakie nominalne stężenie \bar{c} uzyskuje się dla takich danych? Podać

transmitancje $\frac{\Delta C(s)}{\Delta Q_1(s)}, \frac{\Delta C(s)}{\Delta Q_2(s)}$. Jak wygląda wykres zmiany stężenia $\Delta c(t)$

przy skokowej zmianie dopływu $q_1(t)$ o 10%?

2. Modele obiektów sterowania



Wyjaśnienie. Masę substratu (substancji rozpuszczonej) zawartą w zbiorniku, wyrażoną w kilomolach, określa wzór

$$M = Vc \text{ [kmol]}$$

Rozwiązanie

- Bilans masy substratu – model ogólny

$$V \frac{dc}{dt} = q_1 c_1 + q_2 c_2 - (q_1 + q_2) c \quad \left[\frac{\text{kmol}}{\text{s}} \right]$$

- Stan nominalny – model statyki, wyznaczenie \bar{c}

$$0 = \bar{q}_1 \bar{c}_1 + \bar{q}_2 \bar{c}_2 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \bar{c}, \quad \bar{c} = \frac{\bar{q}_1 \bar{c}_1 + \bar{q}_2 \bar{c}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} = 1.25 \quad \left[\frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} \right]$$

- Linearyzacja

$$c(t) = \bar{c} + \Delta c(t), \quad q_1(t) = \bar{q}_1 + \Delta q_1(t), \quad q_2(t) = \bar{q}_2 + \Delta q_2(t)$$

$$V \frac{d\Delta c}{dt} = (\bar{c}_1 - \bar{c}) \Delta q_1 + \bar{q}_2 \Delta c_2 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \Delta c$$

- Transformacja Laplace'a, transmitancje

$$[Vs + (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)] \Delta C(s) = (\bar{c}_1 - \bar{c}) \Delta Q_1(s) + \bar{q}_2 \Delta C_2(s)$$

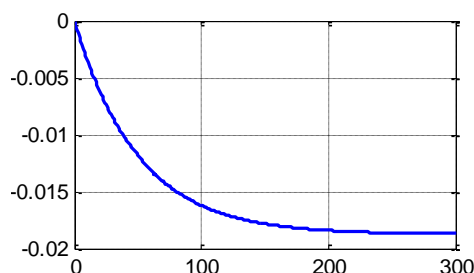
$$\frac{\Delta C(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{\bar{c}_1 - \bar{c}}{Vs + (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)} = \frac{\frac{\bar{c} - \bar{c}_1}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}}{\frac{V}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} s + 1} = -\frac{12.5}{50s + 1} \quad \left[\frac{\text{kmol}}{\text{m}^3/\text{s}} \right]$$

$$\frac{\Delta C(s)}{\Delta C_2(s)} = \frac{\bar{q}_2}{Vs + (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)} = \frac{\frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}}{\frac{V}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}s + 1} = \frac{0.25}{50s + 1} [-]$$

- Odpowiedź skokowa dla $\Delta q_1(t) = 0.1\bar{q}_1 \cdot 1(t)$

Matlab

```
L=-12.5;
M=[50 1]
t=0:1:300;
y=0.1*0.015*step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



Ze wzrostem dopływu q_i stężenie roztworu maleje.

Z 2.2. Piec komorowy

W piecu komorowym opalonym gazem (rysunek) nagrzewany jest cienkościenny wsad przesuwający się powoli na konwejerze (urządzenie transportujące). Temperaturę reguluje się dopływem gazu. Oznaczenia są następujące:

T_0, T_p, T – temperatury: wejściowa wsadu, płomienia, panująca w komorze pieca [$^{\circ}\text{C}$],

M – masa wsadu zawartego w komorze [kg],

v – prędkość konwejera [m/h],

q, nq – dopływy gazu i powietrza [m^3/h],

n – współczynnik nadmiaru powietrza w stosunku do gazu.

Dla ułożenia bilansu cieplnego potrzebne są jeszcze:

m – masa wsadu przypadająca na jednostkę długości konwejera [kg/m],

c, c_s – ciepło właściwe wsadu i spalin [$\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$],

ρ_s – gęstość spalin [kg/m^3].

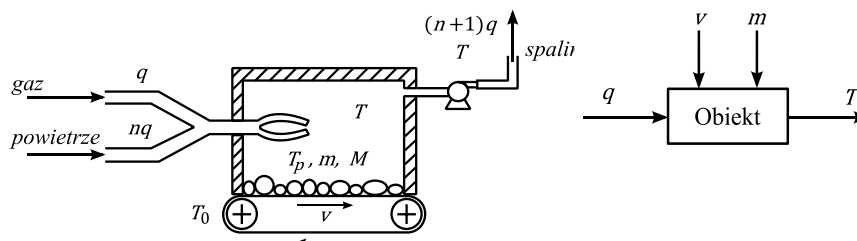
2. Modele obiektów sterowania

Dane liczbowe:

$$M = 1000, \quad c = 0.8 \cdot 10^3, \quad m = 300, \quad n = 9, \quad v = 1$$

$$T_p = 1500, \quad T_0 = 20, \quad \rho_s = 1, \quad c_s = 1 \cdot 10^3$$

Jaki powinien być dopływ gazu \bar{q} , aby nagrzać wsad do temperatury $\bar{T} = 400^\circ\text{C}$? Podać wykres statycznej charakterystyki pieca, tzn. funkcję $\bar{T}(\bar{q})$. Jak wygląda transmitancja $\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q(s)}$? Przypuśćmy, że efekt zmiany dopływu gazu widać dopiero w temperaturze po 10 minutach (opóźnienie). Jak należałoby wtedy zmodyfikować transmitancję?



Rozwiązanie

- Bilans energii

Składniki bilansu $\left[\frac{J}{h}\right]$:

$(n + 1)q\rho_s c_s T_p$ – ciepło dostarczane przez spaliny o temperaturze płomienia T_p ,

$(n + 1)q\rho_s c_s T$ – ciepło odprowadzane przez spaliny do komina,

$mv c(T - T_0)$ – ciepło pobrane przez wsad nagrzewany od temperatury T_0 do T .

Uwaga. Powyżej dla uproszczenia przyjęto, że z 1 m^3 gazu i $n\text{ m}^3$ powietrza powstaje $(n + 1)\text{ m}^3$ spalin o temperaturze płomienia T_p .

- Równanie bilansu

$$Mc \frac{dT}{dt} = (n+1)q c_s \rho_s (T_p - T) - mvc(T - T_0) \quad \left[\frac{J}{h} \right]$$

Wyjaśnienie. Masa spalin znajdujących się w komorze pieca, jako wielokrotnie mniejsza od masy wsadu M , została pominięta.

- Stan nominalny (zakłócenia pomijane: $T_0, v, T_p, m = const$)

$$0 = (n+1)\bar{q} c_s \rho_s (T_p - \bar{T}) - mvc(\bar{T} - T_0)$$

$$\bar{q} = \frac{mvc(\bar{T} - T_0)}{(n+1)c_s \rho_s (T_p - \bar{T})} = \frac{300 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 10^3 \cdot (400 - 20)}{(9+1) \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (1500 - 400)} = 8.3 \quad \left[\frac{m^3}{h} \right]$$

Charakterystyka statyczna pieca komorowego

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{q}) &= \frac{\bar{q}(n+1)c_s \rho_s T_p + mvc T_0}{\bar{q}(n+1)c_s \rho_s + mvc} = \frac{\bar{q} \cdot (9+1) \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1500 + 300 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 10^3 \cdot 20}{\bar{q} \cdot (9+1) \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 1 + 300 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 10^3} = \\ &= \frac{\bar{q} \cdot 10 \cdot 1500 + 300 \cdot 0.8 \cdot 20}{\bar{q} \cdot 10 + 300 \cdot 0.8} \end{aligned}$$

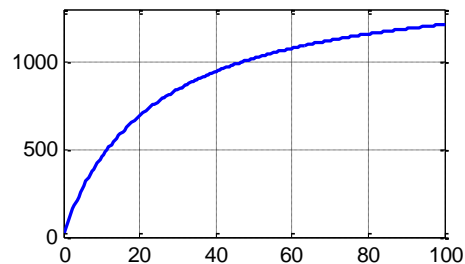
Matlab

```
q=0:0.5:100;
```

```
T=(q*10*1500+300*0.8*20)./(q*10+300*0.8); - dzielenie ./
```

```
plot(q,T);grid
```

Przy wzroście dopływu gazu temperatura w piecu zbliża się asymptotycznie do temperatury płomienia.



- Linearyzacja

$$T(t) = \bar{T} + \Delta T(t), \quad q(t) = \bar{q} + \Delta q(t)$$

$$Mc \frac{d\Delta T}{dt} = -[(n+1)\bar{q} \rho_s c_s + mvc] \Delta T + (n+1) \rho_s c_s (T_p - \bar{T}) \Delta q$$

2. Modele obiektów sterowania

- Transformacja Laplace'a, transmitancja

$$[Mcs + (n + 1)\bar{q}c_s\rho_s + cmv]\Delta T(s) = (n + 1)c_s\rho_s(T_p - \bar{T})\Delta Q(s)$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{(n+1)c_s\rho_s(T_p - \bar{T})}{[Mcs + (n+1)\bar{q}c_s\rho_s + cmv]} = \frac{34}{2.48s + 1}$$

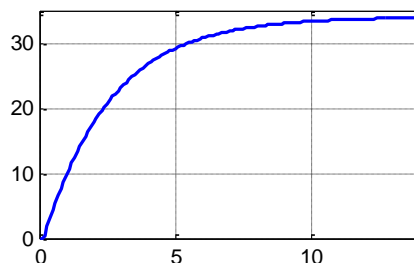
- Opóźnienie

$$10 \text{ min} = 0.167 \text{ godz.}$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{34}{2.48s + 1} e^{-0.167s}$$

Matlab

```
t=0:0.1:14;  
[Lp Mp]=pade(0.167,10);  
y=step(34*Lp,conv([2.48 1],Mp),t);  
plot(t,y);grid
```



Opóźnienie przedstawiono za pomocą aproksymacji Padé 10-go rzędu.

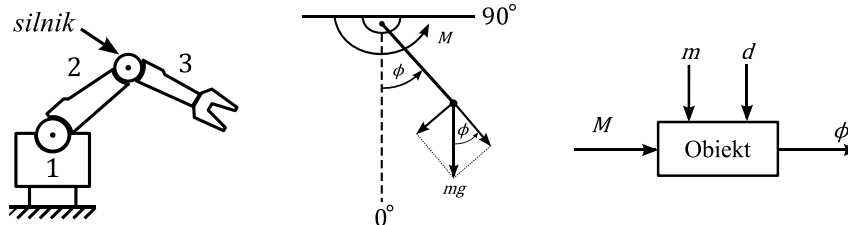
Z 2.3. Robot trójosiowy

Prosty robot pokazany schematycznie na rysunku składa się z podstawy obrotowej 1, ramienia dolnego 2 i górnego 3. Podać modele dla sterowania ramionami.

a) Ramię opuszczone

Chodzi o sterowanie ramieniem 3 przez silnik zamocowany na końcu ramienia 2. Przyjęto następujące oznaczenia: ϕ - kąt odchylenia ramienia 3 od pionu [rd], M - moment napędowy silnika [Nm], m - zastępcza masa ramienia 3 wraz z ładunkiem [kg], d odległość środka masy m od osi obrotu silnika [m]. Szukana jest transmitancja $\frac{\Delta\phi(s)}{\Delta M(s)}$, przy upraszczającym założeniu, że m można potraktować jako masę skupioną w odległości d od osi obrotu.

Dane liczbowe: $m = 10$, $d = 0.3$, $\bar{\phi} = 0$ (pion).



Wyjaśnienie. Zmiany zastępczej masy m i odległości d od środka ciężkości mogą być traktowane jako zakłócenia.

Rozwiązanie

- Bilans momentów

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_o \text{ [Nm]}, \quad J = md^2, \quad M_o = mgd \sin \phi, \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$md^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = M - mgd \sin \phi$$

- Stan nominalny – ramię pionowe

$$\bar{\phi} = 0 \Rightarrow \bar{M} = 0$$

- Linearyzacja

$$\phi(t) = \bar{\phi} + \Delta\phi(t), \quad M(t) = \bar{M} + \Delta M(t)$$

$$md^2 \frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} = \Delta M - mgd \cos \bar{\phi} \cdot \Delta\phi$$

- Transformacja Laplace'a, transmitancja

$$md^2 s^2 \Delta\Phi(s) = \Delta M(s) - mgd \Delta\Phi(s)$$

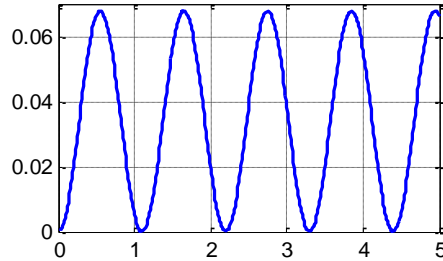
$$\frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta M(s)} = \frac{1}{md^2 s^2 + mgd}$$

$$\frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta M(s)} = \frac{1}{0.9s^2 + 29.43} = \frac{1.11}{s^2 + 32.7}$$

2. Modele obiektów sterowania

Matlab

```
L=1.11;
M=[1 0 32.7];
t=0:0.01:5;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```

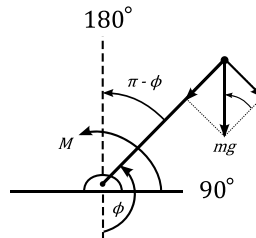
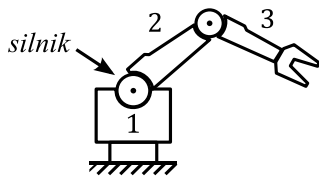


Opuszczone ramię jest obiektem oscylacyjnym, ponieważ bieguny transmitancji są urojone $s_{1,2} = \pm j5.72$. Okres oscylacji wynosi $T_{osc} = \frac{2\pi}{5.72} = 1.09$ s.

b) Ramię wzniesione

Chodzi o sterowanie ramieniem 2 za pomocą silnika umieszczonego na podstawie obrotowej. Oznaczenia są takie same jak poprzednio, ale tym razem m oznacza masę ramion 2, 3 oraz ładunku, a d jest odległością jej środka od osi obrotu silnika.

Dane liczbowe: $m = 20$, $d = 0.5$, $\bar{\phi} = \pi$ (pion)



Rozwiązanie

- Bilans momentów

$$md^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = M - mgd \sin(\pi - \phi)$$

- Linearyzacja

$$\phi(t) = \bar{\phi} + \Delta\phi(t), \quad M(t) = \bar{M} + \Delta M(t)$$

Ponieważ $\sin(\pi - \phi) \cong \sin(\pi - \bar{\phi}) - \cos(\pi - \bar{\phi}) \Delta\phi$ więc

$$md^2 \frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} = \Delta M + mgd \cos(\pi - \bar{\phi}) \cdot \Delta\phi$$

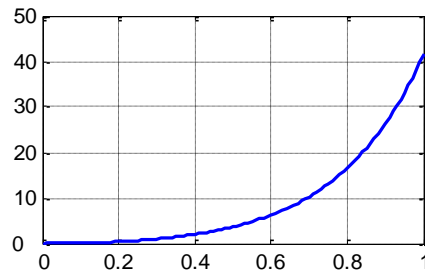
- Transmitancja ($\bar{\phi} = \pi$)

$$md^2s^2\Delta\Phi(s) = \Delta M(s) + mgd\Delta\Phi(s)$$

$$\frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta M(s)} = \frac{1}{md^2s^2 - mgd} = \frac{1}{5s^2 - 98.1} = \frac{0.2}{s^2 - 19.6}$$

Matlab

```
L=0.2;
M=[1 0 -19.6];
t=0:0.01:1;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



Wzniesione ramię jest obiektem niestabilnym, ponieważ jeden z dwu pierwiastków mianownika (biegunów) jest dodatni $s_{1,2} = \pm 4.43$.

Z 2.4. Silnik sterowany od strony wzbudzenia

Silniki prądu stałego steruje się czasem od strony wzbudzenia. Typowy układ pokazano na rysunku stosując następujące oznaczenia: R_w , L_w – rezystancja i indukcyjność obwodu wzbudzenia, U_w , i_w – napięcie i prąd wzbudzenia, J – moment bezwładności wirnika, ω – prędkość obrotowa, i – prąd wirnika. Dane są następujące:

$$R_w = 10 \Omega, \quad L_w = 1 H, \quad i = 10 A, \quad J = 0.01 \text{ kgm}^2$$

$$\bar{U}_w = 12 V, \quad \bar{P} = 7.854 \text{ kW}, \quad \bar{n} = 3000 \text{ obr/min}$$

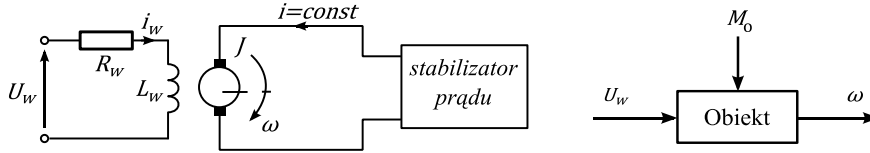
Należy znaleźć transmitancję $\frac{\Omega(s)}{U_w(s)}$ określającą oddziaływanie napięcia wzbudzenia na prędkość.

Wskazówka. Zakładając liniową charakterystykę magnesowania wzbudzenia moment elektromagnetyczny można wyrazić wzorem

$$M_{em} = \chi_s i_w i,$$

gdzie χ_s jest stałą konstrukcyjną silnika.

2. Modele obiektów sterowania



Rozwiązanie

- Stan nominalny

$$\bar{i}_w = \frac{\bar{U}_w}{R_w} = 1.2 \text{ A}, \quad \bar{M}_{em} = \frac{\bar{P}}{\omega} = \frac{7854}{\frac{2\pi}{60}} = 25 \text{ Nm}$$

$$\bar{M}_{em} = \chi_s \bar{i}_w i, \quad \chi_s = \frac{\bar{M}_{em}}{\bar{i}_w i} = 2.083 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}^2} \right]$$

- Bilans momentów

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{em} - M_o, \quad M_{em} = \chi_s i_w i$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \chi_s i_w i - M_o \Rightarrow Js\Omega(s) = \chi_s i I_w(s) - M_o(s)$$

- Obwód wzbudzenia

$$U_w = i_w R_w + L_w \frac{di_w}{dt}$$

$$U_w(s) = I_w(s) R_w + s L_w I_w(s) \Rightarrow I_w(s) = \frac{1}{s L_w + R_w} U_w(s)$$

- Transmitancja

Otrzymuje się ją łącząc powyższe równania. Ponieważ są one liniowe, więc wobec zasady superpozycji wyznaczając transmitancję $\frac{\Omega(s)}{U_w(s)}$ można pominąć moment obciążenia M_o .

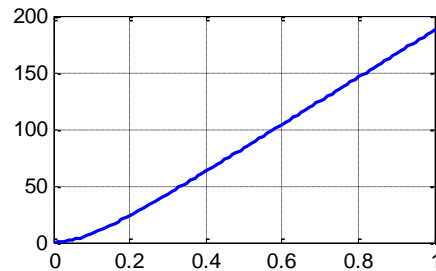
$$Js\Omega(s) = \chi_s i \frac{1}{s L_w + R_w} U_w(s) - M_o(s) \xrightarrow{M_o=0} \frac{\Omega(s)}{U_w(s)} = \frac{\chi_s i}{Js(s L_w + R_w)} =$$

$$= \frac{\chi_s i}{JR_w s \left(\frac{L_w}{R_w} s + 1 \right)}$$

$$\frac{\Omega(s)}{U_w(s)} = \frac{2.083 \cdot 10}{0.01 \cdot 10 \cdot s \left(\frac{1}{10}s + 1 \right)} = \frac{208.3}{s(0.1s+1)} \left[\frac{rd/s}{V} \right]$$

Matlab

```
L=208.3;
M=[0.1 1 0];
t=0:0.01:1;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



Z 2.5. Prądnica prądu stałego

Prądnicę napędza silnik spalinowy lub elektryczny. Schematy elektryczny i zastępczy pokazano niżej stosując następujące oznaczenia: R_w, L_w – rezystancja i indukcyjność obwodu wzbudzenia, U_w, i_w – napięcie i prąd wzbudzenia, R, L – rezystancja i indukcyjność obwodu wirnika, U, i – napięcie i prąd wirnika, R_o – rezystancja obciążenia, SEM – siła elektromotoryczna. Parametry prądnicy oraz dane nominalne są następujące:

$$R_w = 5 \Omega, \quad L_w = 1 H, \quad R = 1 \Omega, \quad L = 2.5 H, \quad \bar{U}_w = 50 V$$

$$n = 1500 \text{ obr/min}, \quad \overline{SEM} = 220 V, \quad \bar{P} = 5 kW$$

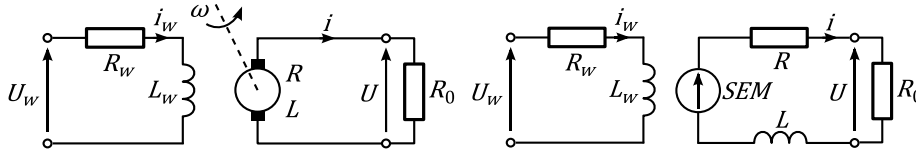
Można przyjąć, że w stanie jałowym (bez obciążenia) napięcie wirnika U jest w przybliżeniu równe nominalnej sile elektromotorycznej, tj. $U \cong \overline{SEM} = 220 V$. Wyznaczyć nominalną rezystancję obciążenia \bar{R}_0 oraz transmitancję $\frac{U(s)}{U_w(s)}$. Jak zmieni się transmitancja, gdy równolegle do R_0 zostanie dołączony kondensator C_0 ?

Wskazówka. Zakładając liniową charakterystykę magnesowania wzbudzenia siłą elektromotoryczną można wyrazić wzorem

$$SEM = c_p i_w \omega,$$

gdzie c_p oznacza stałą konstrukcyjną prądnicy, a ω prędkość obrotową.

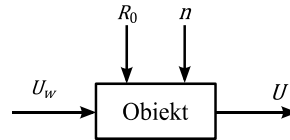
2. Modele obiektów sterowania



Rozwiązanie

- Stan nominalny

$$\bar{i}_w = \frac{\bar{U}_w}{R_w} = 10 \text{ A}$$



$$\bar{P} = SEM \cdot \bar{i} \Rightarrow \bar{i} = \frac{\bar{P}}{SEM} = 22.73 \text{ A}, \quad \bar{R}_0 = \frac{SEM}{\bar{i}} - R = 8.68 \Omega$$

- Stan jałowy

$$n = 1500 \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right] = 1500 \frac{2\pi}{60} \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] = 157 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right]$$

$$R_0 = \infty \Rightarrow i = 0, \quad SEM = c_p \bar{i}_w \omega \Rightarrow c_p = \frac{SEM}{\bar{i}_w \omega} = \frac{SEM \cdot R_w}{\bar{U}_w \omega} = 0.14 \left[\frac{\text{V}}{\text{A rd/s}} \right]$$

- Równania obwodu prądnic

$$\begin{cases} U_w = i_w R_w + L_w \frac{di_w}{dt} \\ SEM = i(R + R_0) + L \frac{di}{dt} \\ SEM = c_p i_w \omega \\ U = i R_0 \end{cases}$$

- Transformacja Laplace'a, transmitancja

$$U_w(s) = I_w(s)R_w + sL_w I_w(s) \Rightarrow I_w(s) = \frac{1}{sL_w + R_w} U_w(s)$$

$$c_p i_w \omega = i(R + R_0) + L \frac{di}{dt} \Rightarrow I(s) = \frac{c_p \omega}{sL + (R + R_0)} I_w(s)$$

$$I(s) = \frac{c_p \omega}{sL + (R + R_0)} I_w(s) = \frac{c_p \omega}{sL + (R + R_0)} \cdot \frac{1}{sL_w + R_w} U_w(s)$$

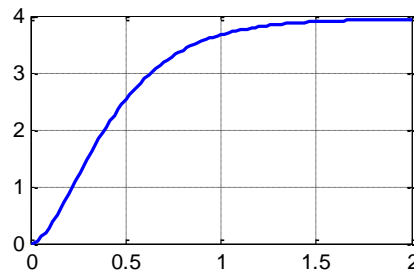
$$U(s) = I(s)R_0 = \frac{R_0 c_p \omega}{(sL+R+R_0)(sL_w+R_w)} U_w(s)$$

$$\frac{U(s)}{U_w(s)} = \frac{R_0 c_p \omega}{(sL+R+R_0)(sL_w+R_w)}$$

$$\frac{U(s)}{U_w(s)} = \frac{8.68 \cdot 0.14 \cdot 157}{(2.5s+1+8.68)(s+5)} = \frac{190.78}{(s+5)(2.5s+9.68)} = \frac{3.94}{(0.2s+1)(0.26s+1)}$$

Matlab

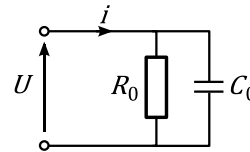
```
L=3.94;
M=conv([0.2 1],[0.26 1]);
t=0:0.02:2;
y=step(L,M,t);
plot(t,y);grid
```



- Układ z dodatkowym kondensatorem C_0

Powyżej zamiast R_0 należy wstawić

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_0 = \frac{R_0}{sC_0R_0+1}$$



Wtedy $\frac{U(s)}{U_w(s)} = \frac{R_0 c_p \omega}{(sL_w+R_w)(LC_0R_0s^2+(C_0R_0R+L)s+R+R_0)}$, a więc jest to teraz transmitancja 3-go rzędu.

Zadania domowe

D 2.1. Zbiornik ciśnieniowy

Do zbiornika doprowadzana jest ciecz w ilości q . Zbiornik jest zamknięty, sprężarka utrzymuje ciśnienie pod kopułą zbiornika na wartości p (średnio). Dane są następujące:

$$S = 5 \text{ m}^2, \quad \bar{p} = 0.5 \text{ MPa}, \quad \bar{h} = 5 \text{ m}, \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

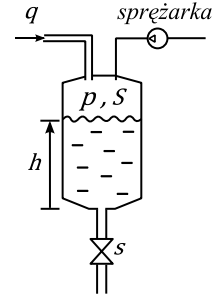
$$\bar{q} = 0.02 \text{ m}^3/\text{s}$$

2. Modele obiektów sterowania

Ile wynosi nominalna powierzchnia swobodna \bar{s} zaworu na odpływie? Jak wygląda transmitancja $\frac{\Delta H(s)}{\Delta P(s)}$?

Wskazówka. Prędkość wypływu wody przez dolny zawór wyraża wzór Bernoulliego

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2p}{\rho}}$$



Odp.: $\bar{s} = \frac{\bar{q}}{\sqrt{2g\bar{h} + \frac{2\bar{p}}{\rho}}} = 6 \text{ cm}^2, \quad \frac{\Delta H(s)}{\Delta P(s)} = -\frac{k}{Ts+1} = -\frac{1.02 \cdot 10^{-4}}{28178s+1},$

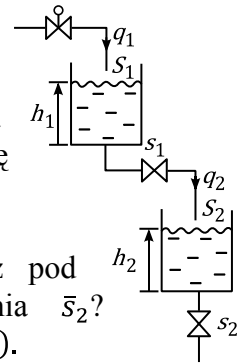
$$k = \frac{1}{\rho g}, \quad T = \frac{S \sqrt{2g\bar{h} + \frac{2\bar{p}}{\rho}}}{\bar{s}g}$$

D 2.2. Kaskada dwu zbiorników

Do pierwszego z dwóch zbiorników tworzących kaskadę dopływa ciecz w ilości q_1 , która potem spływa do drugiego zbiornika pod własnym ciśnieniem (hydrostatycznym). Dane są następujące:

$$S_1 = 1 \text{ m}^2, \quad S_2 = 1.5 \text{ m}^2, \quad \bar{q}_1 = 0.27 \text{ m}^3/\text{s}, \quad \bar{h}_1 = 5 \text{ m}, \quad \bar{h}_2 = 4 \text{ m}$$

Jaka jest powierzchnia swobodna \bar{s}_1 na wypływie z pierwszego zbiornika? Jaka jest transmitancja $\frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_1(s)}$? Rozważyć dwa warianty opróżniania zbiornika pokazane na rysunkach i wyznaczyć transmitancję kaskady $\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_1(s)}$.



- Z drugiego zbiornika ciecz wypływa również pod własnym ciśnieniem. Ile wynosi powierzchnia \bar{s}_2 ? Wyznacz odpowiedź $\Delta h_2(t)$ dla $q_1(t) = 0.05 \cdot 1(t)$.
- Teraz z drugiego zbiornika ciecz jest odciągana przez pompę o nominalnym wydatku \bar{q}_1 . Podaj wykres odpowiedzi skokowej dla wzrostu dopływu $q_1(t)$ o 10%.

Odp.: a) $\bar{s}_1 = \frac{\bar{q}_1}{\sqrt{2g\bar{h}_1}} = 0.027 \text{ m}^2$

$\bar{s}_2 = \frac{\bar{q}_1}{\sqrt{2g\bar{h}_2}} = 0.03 \text{ m}^2$

$\frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k}{Ts+1} = \frac{37.4}{(37.4s+1)}$

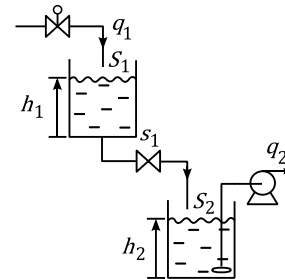
$k = \frac{\sqrt{2g\bar{h}_1}}{\bar{s}_1 g}, \quad T = \frac{S_1 \sqrt{2g\bar{h}_1}}{\bar{s}_1 g}$

$\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k_1}{(Ts+1)(T_1s+1)} = \frac{29.6}{(37.4s+1)(44.4s+1)}$

$k_1 = \frac{\sqrt{2g\bar{h}_2}}{\bar{s}_2 g}, \quad T = \frac{S_1 \sqrt{2g\bar{h}_1}}{\bar{s}_1 g}, \quad T_1 = \frac{S_2 \sqrt{2g\bar{h}_2}}{\bar{s}_2 g}$

b) $\bar{s}_1 = \frac{\bar{q}_1}{\sqrt{2g\bar{h}_1}} = 5.05 \text{ cm}^2$

$\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{0.2}{s(6012s+1)}, \quad k = \frac{1}{S_2}, \quad T = \frac{S_1 \sqrt{2g\bar{h}_1}}{\bar{s}_1 g}$

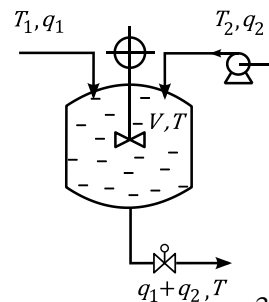


D 2.3. Mieszanie wody zimnej i gorącej

Do zbiornika doprowadzana jest woda zimna i gorąca (rysunek) w celu uzyskania wody o temperaturze pośredniej. Przez T_1, T_2 oznaczone są temperatury wejściowe [$^{\circ}\text{C}$], przez q_1, q_2 dopływy [m^3/s], T jest temperaturą pośrednią, a V objętością zbiornika [m^3]. Dane są następujące:

$\bar{T}_1 = 20, \quad \bar{T}_2 = 100, \quad \bar{T} = 50, \quad \bar{q}_1 = 0.0015, \quad V = 1.5$

Jaki dopływ \bar{q}_2 zapewni uzyskanie temperatury \bar{T} ?
 Jaką postać ma transmitancja $\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q_2(s)}$? Jak należy zmodyfikować transmitancję, jeżeli efekt zmiany dopływu zacznie być widoczny dopiero po minucie?

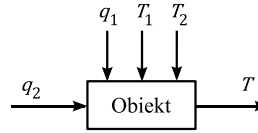


2. Modele obiektów sterowania

$$\text{Odp.: } \bar{q}_2 = \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}}{\bar{T} - \bar{T}_2} \bar{q}_1 = 0.0009 \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q_2(s)} = \frac{\frac{\bar{T}_2 - \bar{T}}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2}}{\frac{V}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} s + 1} = \frac{2.08 \cdot 10^4}{625s + 1}$$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q_2(s)} = \frac{2.08 \cdot 10^4}{625s + 1} e^{-60s}$$



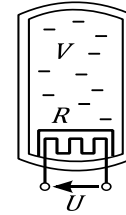
D 2.4. Bojler elektryczny

W zamkniętym izolowanym cieplnie zbiorniku podgrzewa się wodę do temperatury T . Spirala grzejna jest zasilana napięciem U , moc pobierana wynosi P . Jaką rezystancję R ma spirala? W ciągu jakiego czasu t_1 woda nagrzeje się od temperatury T_0 do T ? Podaj transmitancję $\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)}$. Dane liczbowe:

$$V = 0.05 \text{ m}^3, \quad \bar{P} = 2 \text{ kW}, \quad \bar{T}_0 = 20^\circ\text{C}, \quad \bar{T} = 70^\circ\text{C}$$

$$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad c = 4.19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}, \quad \bar{U} = 220 \text{ V}$$

$$\text{Odp.: } R = \frac{\bar{U}^2}{\bar{P}} = 24.2 \Omega, \quad t_1 = \frac{\rho V c R}{\bar{U}^2} (\bar{T} - \bar{T}_0) = 5237.5 \text{ s}$$



$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\frac{2\bar{U}}{\rho V c R}}{s} = \frac{8.67 \cdot 10^{-5}}{s}$$

D 2.5. Podgrzewacz przepływowy

Przepływowy podgrzewacz elektryczny pokazany na rysunku podgrzewa wodę od temperatury T_0 do T . Przepływ wody wynosi q , napięciem zasilania grzałki jest U . Ile wynosi rezystancja R spirali grzejnej? Jak wygląda transmitancja $\frac{\Delta T(s)}{\Delta Q(s)}$? Dane liczbowe:

$$V = 0.1 \text{ m}^3, \quad \bar{T}_0 = 20^\circ\text{C}, \quad \bar{T} = 60^\circ\text{C}, \quad \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

2. Modele obiektów sterowania

$$c = 4.19 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}, \quad \bar{U} = 250 V, \quad \bar{q} = 1.2 \frac{m^3}{h}$$

Odp.: $R = \frac{\bar{U}^2}{\bar{q}\rho c(\bar{T} - \bar{T}_0)} = 1.12 \Omega$

$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{k}{Ts+1} = \frac{0.32}{300s+1}$$

$$k = \frac{2\bar{U}}{R\bar{q}\rho c} = 0.32 \left[\frac{K}{V} \right], \quad T = \frac{V}{\bar{q}} = 300 s$$

