1. TRANSFORMACJA LAPLACE'A

Tabele transformat

W poniższych tabelach podawana jest najpierw transformata $F(s)$, a potem jej oryginał $f(t)$, ponieważ typowe zadania polegają na wyznaczeniu $f(t)$ mając dane $F(s)$ (transformacja odwrotna).

Wzory ogólne

$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{f(t)}$
$sF(s) - f_0$	$\frac{d}{dt} f(t)$
$s^2F(s) - f_0 - sf_0'$	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$
$F(s+a)$	$e^{-at} f(t)$
$F\left(\frac{s}{\omega_n}\right)$	$\omega_n f(\omega_n t)$
$\lim_{s \to 0} sF(s)$	$\lim_{t \to \infty} f(t)$
$e^{-\tau s} F(s)$	$f(t - \tau)$

Transformaty elementarne

$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2!} t^2$

1. Transformacja Laplace′a

$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{3!}t^3$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at - 1 + e^{-at})$
$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1 + at)e^{-at}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$

Funkcje trygonometryczne

$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{\sigma t}\sin \omega t$
$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{\sigma t}\cos \omega t$
$\frac{\sigma^2+\omega^2}{s[(s-\sigma)^2+\omega^2]}$	$1 - e^{\sigma t}\left(\cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega}\sin \omega t\right)$

Stała czasowa

$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$1-e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{s^2(Ts+1)}$	$t-\frac{1}{T}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$
$\frac{1}{s(Ts+1)^2}$	$1-\left(1+\frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}$

Pierwiastki rzeczywiste jednokrotne

Chodzi o pierwiastki mianownika transformaty Laplace′a (nazywane także biegunami).

Podstawowe wzory

$$F(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdot a'(s)}=\frac{R_1}{s-p_1}+\frac{R_2}{s-p_2}+\cdots \tag{1.1a}$$

$$R_i=(s-p_i)\cdot F(s)\big|_{s=p_i}=\frac{b(s)}{a'(s)}\bigg|_{s=p_i} \tag{1.1b}$$
– tzw. *metoda przesłaniania*

$$f(t)=R_1e^{p_1t}+R_2e^{p_2t}+\cdots \tag{1.1c}$$

Kropki po prawej stronie rozwinięcia $F(s)$ reprezentują ułamki odpowiadające pierwiastkom pozostałej części mianownika.

Tryb wyznaczania $f(t)$

- Rozwiązanie analityczne – kolejno wyznaczane są:
  – bieguny p_i – rezidua R_i – oryginał $f(t)$

- Matlab – funkcje
  – `residue()` ⇒ R_i, p_i
  – `impulse()` ⇒ wartości $f(t)$
  – `plot()` ⇒ wykres $f(t)$

Pierwiastki p_i można także otrzymać funkcją `roots()`.

Przykład

Z 1.1. Wyznaczyć oryginał $f(t)$ następującej transformaty Laplace′a

$$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$$

Rozwiązanie

- $$F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+5}$$

  $$R_1 = s \cdot F(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{10}{2\cdot 5} = 1$$

  $$R_2 = (s+2) \cdot F(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{10(s+1)}{s(s+5)}\right|_{s=-2} = \frac{10\cdot(-2+1)}{(-2)\cdot(-2+5)} = \frac{5}{3}$$

  $$R_3 = (s+5) \cdot F(s)\big|_{s=-5} = \left.\frac{10(s+1)}{s(s+2)}\right|_{s=-5} = \frac{10\cdot(-5+1)}{(-5)\cdot(-5+2)} = -\frac{8}{3}$$

  $$f(t) = 1 + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t}$$

- Matlab

```
L=10*[1 1];
M=conv([1 2 0],[1 5]);
[R,p,k]=residue(L,M)
```

– $10(s+1)$

– $s(s+2) \Rightarrow [1\ 2\ 0]$, $s+5 \Rightarrow [1\ 5]$

```
    -2.6667           -5
R =  1.6667     p =  -2          k =  [ ]
     1.0000            0
```

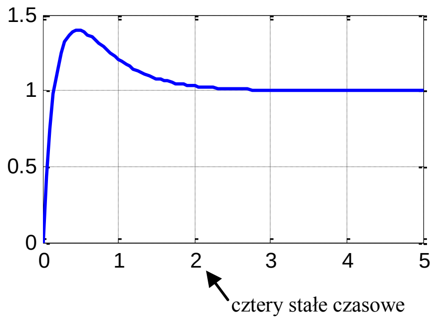
$$F(s) = \frac{1}{s} + \underset{\frac{5}{3}}{\frac{1.6667}{s+2}} + \underset{-\frac{8}{3}}{\frac{-2.6667}{s+5}}, \qquad T_{max} = \frac{1}{2}$$ – większa stała czasowa

Uwaga. Przedział czasu dla wykreślenia $f(t)$ powinien wynosić 5 do 10 dominujących stałych czasowych (największych).

Większą stałą czasową jest tutaj $\frac{1}{2}$, więc jako przedział czasu można przyjąć $10 \cdot \frac{1}{2} = 5$.

```
t=0:0.05:5;
f=impulse(L,M,t);
plot(t,f);grid
max(f)     1.3966
```

Typowy wykres składa się z ok.100 wartości (od 50 do 200).



deg L = deg M

W przypadku, gdy stopnie (*deg*) licznika *L* i mianownika *M* transformaty $F(s)$ są jednakowe, wartość k zwracana przez funkcję `residue()` jest wynikiem dzielenia L/M, tzn.

$$\frac{b_n s^n + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = k + \underbrace{\frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_0}{a_n s^n + \dots + a_0}}_{R,\, p}$$

Pierwiastki zespolone

Podstawowe wzory

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p)(s-p^*)\cdot a''(s)}, \qquad \text{gdzie} \qquad \begin{aligned} p &= \sigma + j\omega \\ p^* &= \sigma - j\omega \end{aligned}$$

Oryginał $f(t)$ można wyznaczyć dwoma sposobami.

1) Rezidua wyznaczane standardowo przez przesłanianie czynników $s-p$ i $s-p^*$, tj.:

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p)(s-p^*)\, a''(s)} = \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*} + \cdots \tag{1.2a}$$

$$R = (s-p)F(s)|_{s=p} = \frac{b(s)}{(s-p^*)a''(s)}\bigg|_{s=p}$$

$$R^* = (s-p^*)F(s)|_{s=p^*} = \frac{b(s)}{(s-p)a''(s)}\bigg|_{s=p^*}$$

$$\begin{matrix} p\ = \sigma + j\omega \\ p^* = \sigma - j\omega \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} R = A + jB \\ R^* = A - jB \end{matrix} \qquad \text{– pary sprzężone} \tag{1.2b}$$

$$F(s) = \frac{A+jB}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{A-jB}{s-(\sigma-j\omega)} + \cdots = \frac{A+jB}{(s-\sigma)-j\omega} + \frac{A-jB}{(s-\sigma)+j\omega} =$$

$$= \frac{2A(s-\sigma)-2B\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots = \frac{2A(s-\sigma)+(-2B)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots = \tag{1.2c}$$

$$= \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots$$

$$C = 2A, \quad S = -2B$$

$$f(t) = e^{\sigma t}(C\cos\omega t + S\sin\omega t) + \cdots \tag{1.2d}$$

S, C bywają nazywane „amplitudami sinusa i cosinusa”.

Ponieważ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$

więc $\quad C\cos\omega t + S\sin\omega t = \sqrt{S^2+C^2}\sin(\omega t+\phi)$

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{C}{S}$$

Ostatecznie

$$f(t) = \sqrt{S^2+C^2}e^{\sigma t}\sin(\omega t+\phi) + \cdots, \quad \phi = \operatorname{arctg}\frac{C}{S} \tag{1.2e}$$

2) Amplitudy S, C wyznaczane bezpośrednio przez przesłonięcie iloczynu $(s-p)(s-p^*) = (s-\sigma)^2+\omega^2$

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]\, a"(s)} = \frac{C(s-\sigma)+S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots \qquad (1.2f)$$

Ponieważ $\quad C(s-\sigma) + S\omega|_{s=\sigma+j\omega} = \omega(S+jC) =$

$$= [(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega},$$

więc

$$S + jC = \frac{1}{\omega}[(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega} \qquad (1.2g)$$

Ze względu na przesłanianie obydwu czynników, wyznaczenie *S*, *C* z powyższego wzoru jest mniej pracochłonne niż poprzednio.

Przykład

Z 1.2. Rozwiązać równanie

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = u, \quad u = 1(t), \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0$$

Rozwiązanie

- $s^2X(s) - 2sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{s}, \qquad X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)}$

  $\Delta = 4 - 20 = -16, \quad \sqrt{\Delta} = j4$

  $s_{1,2} = 1 \pm j2, \quad \sigma = 1, \quad \omega = 2$

- *S*, *C* obliczane bezpośrednio

  $$X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)} = \frac{1}{s[(s-1)^2+2^2]} = \frac{R}{s} + \frac{C(s-1)+2S}{(s-1)^2+2^2}$$

  $$R = s \cdot X(s)|_{s=0} = \left.\frac{1}{(s^2-2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{1}{5}$$

  $$S + jC = \frac{1}{\omega}[(s-\sigma)^2 + \omega^2] \cdot F(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \frac{1}{2}[(s-1)^2 + 2^2]$$

$$\left.\frac{1}{s(s^2-2s+5)}\right|_{s=1+j2} = \left.\frac{1}{2s}\right|_{s=1+j2} = \frac{1}{10} - j\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{10}, \quad C = -\frac{1}{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{5} + e^t\left(\frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t\right)$$

$$\sqrt{S^2 + C^2} = \sqrt{\frac{1}{20}}, \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{C}{S} = -2$$

$$\phi = -arctg2 = -1.107_{rd} = -1.107 \cdot \frac{180}{\pi}_{deg}$$

$$x(t) = \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{20}} e^t \sin(2t - 1.107_{rd})$$

- Rezidua standardowe

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+5)} = \frac{1}{s[s-(1+j2)][s-(1-j2)]} = \frac{R}{s} + \frac{A+jB}{s-(1+j2)} + \frac{A-jB}{s-(1-j2)}$$

$$A + jB = [s-(1+j2)] \cdot X(s)|_{s=1+j2} = \left.\frac{1}{s[s-(1-j2)]}\right|_{s=1+j2} =$$

$$= \frac{1}{(1+j2)(1+j2-1+j2)} = \frac{1}{(1+j2)(j4)} = \frac{1}{j4-8} = \frac{j4+8}{-16-64} = \frac{j4+8}{-80} =$$

$$= -\frac{1}{10} - j\frac{1}{20} = A + jB$$

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad S = -2B = \frac{1}{10}, \quad C = 2A = -\frac{1}{5}$$

- Matlab

```
s=1+sqrt(-1)*2
1/(2*s)
```

S+jC

```
0.1000 - 0.2000i
```

```
[R,p,k]=residue(1,[1 -2 5 0])
```

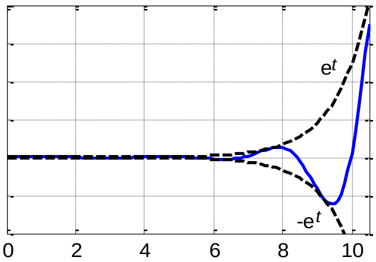
```
        A+jB                      σ+jω

     0.1 - 0.05i                 1 + 2i
R = -0.1 + 0.05i            p = 1 - 2i         k = [ ]
           0.2                     0
```

Ponieważ $\omega = 2$, więc okresem sinusoidy jest $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$. Przedział czasu dla wykresu obejmującego trzy okresy wynosi około 10.5.

Zatem

```
t=0:0.1:10.5;        ok. 3 okresy
x=impulse(1,[1 -2 5 0],t);
plot(t,x);grid
```



Przebieg $x(t)$ reprezentuje narastające oscylacje (układ sterowania zachowujący się w ten sposób jest nazywany niestabilnym).

Pierwiastki wielokrotne

Rozpatrywane są pierwiastki rzeczywiste.

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p)^m \cdot a'''(s)} = \frac{R_1}{s-p} + \frac{R_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{R_m}{(s-p)^m} + \cdots \tag{1.3a}$$

Rezidua R_i oblicza się metodą przesłaniania zaczynając „od końca”, tj.:

$$R_m = \underbrace{(s-p)^m F(s)}_{\alpha_1(s)}\Bigg|_{s=p} = \underbrace{\frac{b(s)}{a'''(s)}}_{\alpha_1(s)}\Bigg|_{s=p} = \alpha_1(s)|_{s=p}$$

$$R_{m-1} = \underbrace{\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\alpha_1(s)}_{\alpha_2(s)}\Bigg|_{s=p} = \alpha_2(s)|_{s=p} \tag{1.3b}$$

$$R_{m-2} = \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{d}{ds}\alpha_2(s)}_{\alpha_3(s)}\Bigg|_{s=p} = \frac{1}{2}\alpha_3(s)\Big|_{s=p}$$

$$\dots$$

$$R_1 = \frac{1}{(m-1)!}\underbrace{\frac{d}{ds}\alpha_{m-1}(s)}_{\alpha_m(s)}\Bigg|_{s=p} = \frac{1}{(m-1)!}\alpha_m(s)\Big|_{s=p}$$

Ponieważ $\frac{R_i}{(s-p)^i} \Rightarrow \frac{1}{(i-1)!}R_i t^{i-1}e^{pt}$,

więc

$$f(t) = R_1e^{pt} + R_2te^{pt} + \frac{1}{2}R_3t^2e^{pt} + \dots + \frac{1}{(m-1)!}R_mt^{m-1}e^{pt} + \\ \dots = (R_1 + R_2t + \frac{1}{2}R_3t^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}R_mt^{m-1})e^{pt} + \dots \qquad (1.3c)$$

W szczególności dla m=3 mamy

$$f(t) = (R_1 + R_2t + \frac{1}{2}R_3t^2)e^{pt} + \dots \qquad (1.3d)$$

Przykład

Z 1.3. Wyznaczyć transformatę odwrotną

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)^3(s+1)}, \qquad f(t) = ?$$

Rozwiązanie

- $F(s) = \frac{s+2}{(s+3)^3(s+1)} = \frac{R_1}{s+3} + \frac{R_2}{(s+3)^2} + \frac{R_3}{(s+3)^3} + \frac{R}{s+1}$

$$R_3 = \underbrace{(s+3)^3F(s)}_{\alpha_1}\Big|_{s=-3} = \underbrace{\frac{s+2}{s+1}}_{\alpha_1}\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{s+2}{s+1}\right)}_{\alpha_1}\Bigg|_{s=-3} = \frac{(s+1)-(s+2)}{(s+1)^2}\Bigg|_{s=-3} = \underbrace{\frac{-1}{(s+1)^2}}_{\alpha_2}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$R_1 = \frac{1}{2!}\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\frac{-1}{(s+1)^2}\right)}_{\alpha_2}\Bigg|_{s=-3} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^3}\Bigg|_{s=-3} = -\frac{1}{8}$$

$$R = (s+1)F(s)|_{s=-1} = \frac{s+2}{(s+3)^3}\Bigg|_{s=-1} = \frac{1}{8}$$

$$f(t) = \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-3t} - \frac{1}{4}te^{-3t} + \frac{1}{4}t^2e^{-3t} = \frac{1}{8}e^{-t} + e^{-3t}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2\right)$$

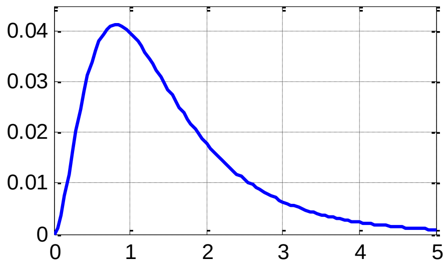
- Matlab

```
L=[1 2];M=conv([1 6 9],[1 3]);M=conv(M,[1 1]);
[R,p,k]=residue(L,M)
```

```
     -0.125   (R1)          -3.0
 R = -0.25    (R2)     p =  -3.0        k = [ ]
      0.5     (R3)          -3.0
      0.125   (R)           -1.0
```

Dominującą stałą czasową jest 1. Wykres może obejmować np. pięć dominujących stałych czasowych.

```
t=0:0.05:5;
f=impulse(L,M,t);
plot(t,f);grid
max(f)     0.0412
```



Zadania domowe

D 1.1. $F(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2}$, $f(t) = ?$

Ile wynoszą t_{min}, f_{min}, gdy $f(t)$ osiąga minimum?

Odp.: $f(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-t}$, $t_{min} = 0.5$

$f_{min} = 1 - 2e^{-\frac{1}{2}} = -0.213$

D 1.2. $F(s) = \frac{3(s+2)}{s^3(s+1)}$, $f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = 3(1 - t + t^2 - e^{-t})$

D 1.3. $F(s) = \frac{12(s+3)}{s^3(s+2)^2}$, $f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = \frac{9}{2}t^2 - 6t + \frac{15}{4} - \left(\frac{3}{2}t + \frac{15}{4}\right)e^{-2t}$

D 1.4. $F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$, $f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = 1 + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-5t}$

D 1.5. $F(s) = \frac{36(s+1)}{s(s+2)^2(s+3)}$, $f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = 3[1 + 8e^{-3t} + e^{-2t}(6t - 9)]$

D 1.6. $F(s) = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$, $f(t) = ?$, $f(\infty) = ?$

Odp.: $f(t) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$, $f(\infty) = \frac{2}{3}$

D 1.7. $F(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s(s+3)(s-4)}$, $\quad f(t) = ?$, $\quad f(0) = ?$

Odp.: $f(t) = \frac{1}{12} + \frac{8}{21}e^{-3t} + \frac{15}{28}e^{4t}, \quad f(0) = 1$

D 1.8. $F(s) = \frac{5(s^2+s+4)}{(s+2)(s^2+4s+13)}$, $\quad f(t) = ?$

Odp.: $f(t) = \frac{10}{3}e^{-2t} + e^{-2t}\left(\frac{5}{3}\cos 3t - 5\sin 3t\right) =$

$$= e^{-2t}\left[\frac{10}{3} - \frac{5\sqrt{10}}{3}\sin\left(3t - \mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)\right]$$

D 1.9. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = u, \quad u = 1(t), \quad y_0 = \dot{y}_0 = 0, \quad y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$

D 1.10. $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u, \quad u = 1(t), \quad y_0 = \dot{y}_0 = 0, \quad y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$

D 1.11. $\ddot{y} + \dot{y} + y = u, \quad u = 1(t), \quad y_0 = \dot{y}_0 = 0, \quad y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] =$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)$$

D 1.12. $2\ddot{y} + \dot{y} + y = u, \quad u = t, \quad y_0 = \dot{y}_0 = 0, \quad y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = -1 + t + e^{-\frac{1}{4}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right) - \frac{3\sqrt{7}}{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\right]$

$$= -1 + t - \frac{4\sqrt{7}}{7}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t - \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right)$$

D 1.13. $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 9\dot{y} = 1, \quad y_0 = \dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0, \quad y(t) = ?$

Odp.: $y(t) = \frac{1}{9}t - \frac{2}{27} + \frac{1}{9}te^{-3t} + \frac{2}{27}e^{-3t}$

D 1.14. $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 29\dot{y} = 29u, \quad u(t) = 1, \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 17,$

$\ddot{y}_0 = -122, \quad y(t) = ?$

Wskazówka: $s^3Y - s^2y_0 - s\dot{y}_0 - \ddot{y}_0 + 4(s^2Y - sy_0 - \dot{y}_0) +$
$29(sY - y_0) = \frac{29}{s}$

Odp.: $y(t) = -2 + t + e^{-2t}(2\cos 5t + 4\sin 5t) =$

$= -2 + t + 2\sqrt{5}\sin\left(5t + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$