

Regulator PID - strojenie

Metody klasycznej liniowej teorii sterowania

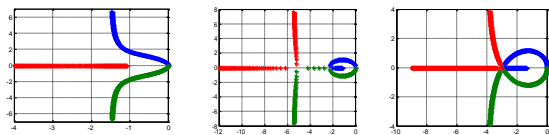
- linie pierwiastkowe Evansa
- projektowanie częstotliwościowe

Metody eksperymentalne

- reguły Zieglera-Nicholsa
- metody prób i błędów

Metoda linii pierwiastkowych dla serwomechanizmów – przebiegi aperiodyczne krytyczne

Stroimy tak aby uzyskać jak najwięcej wielokrotnych biegunów rzeczywistych – czyli stroimy dla punktów rozwidlenia i spotkań linii pierwiastkowych



Strojenie regulatora PID-położenie dla serwomechanizmu prądowego metoda prób i błędów

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s, \quad G(s) = \frac{k}{s^2}$$

(Gall, Kollmorgen)

- Ustawić k_p, k_i, k_d na zero
 - silnik powinien się swobodnie obracać gdy zakrećmy go ręką
 - nie powinno być dryfu – w przeciwnym wypadku należy ustawić tzw. offset tak aby silnik nie kręcił się samoczynnie
 - gdy występuje wertykalne obciążenie należy je zabezpieczyć - hamulec

Zone-based tuning (Ellis)

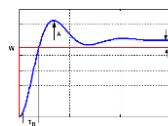
$$G_{zwn} = \frac{k_p s^2 + k_i s + k_d}{s^3 + k_p s^2 + k_i s + k_d}, \quad s = j\omega$$

ω bardzo duże \Rightarrow dominuje $\frac{s^2}{k}$
 ω duże \Rightarrow zaczyna nasygnować rolę $k_i s^2$
 ω małe \Rightarrow dominuje $k_i s$
 ω bardzo małe \Rightarrow koniuje k_i

Realizując kolejne eksperymenty odpowiedzi skokowych wykonywać punkty od 2 do 5

- Zwiększać stopniowo k_i aż do
 - pojawienia się wibracji lub „brzęczenia”, i wtedy zredukować k_i o 25-30%
 - do pojawienia się niewielkiego przeregulowania (5 – 10%)
- Zwiększać stopniowo k_d aż do
 - pojawienia się oznak niestabilności i wtedy zredukować k_d o 25-30%
 - do pojawienia się niewielkiego przeregulowania (5 – 10%)
- Zwiększać stopniowo k_p aż do osiągnięcia wystarczającej dokładności, należy uważać gdyż zbyt duża wartość k_p doprowadzi do niestabilności
- Dokończyć dostrojenia układu modyfikując nastawy zgodnie z tabelą

	k_p ↗	k_d ↗	k_i ↗
P %	↘	↘	↘
t_n	↘	↘	↘
e_u	↘	↘	↘



e_u = błąd ustalony
 t_n = czas narastania (10% - 90%)

Układ II rzędu

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$t_r \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{|\operatorname{Re}(s_D)|}$$

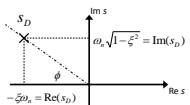
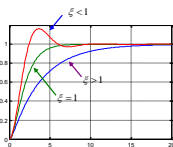
$$p_{\%} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100\%$$

$$\xi = \frac{\ln \frac{p_{\%}}{100}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{p_{\%}}{100}}}$$

$$s_{Dn} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm j\omega$$

Przebiegi

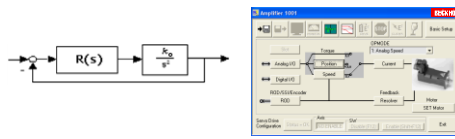
- $\xi > 1$ - aperiodyczny zwykły (dwa bieguny rzeczywiste różne)
- $\xi = 1$ - aperiodyczny krytyczny (jeden biegun podwójny)
- $\xi < 1$ - oscylacyjny (dwa pierwiastki zespolone sprzężone)



$$t_g(\phi) = \frac{|\operatorname{Im}(s_D)|}{|\operatorname{Re}(s_D)|} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow P_{\%}$$

$$t_r = \frac{4}{|\operatorname{Re}(s_D)|} \Rightarrow t_r$$

Podstawowe regulatory położenia dla silników sterowanych prądowo/momentowo

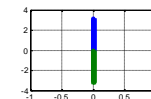


Regulator P – układ na granicy stabilności

$$R(s) = k_p$$

$$G_{ow} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow 1 + k \cdot \frac{1}{s^2} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_p \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{ow} = 0 \Leftrightarrow s = 0$$

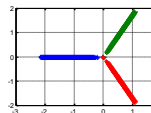


Regulator I – układ niestabilny

$$R(s) = \frac{k_i}{s}$$

$$G_{ow} = \frac{1}{s^3} \Rightarrow 1 + k \cdot \frac{1}{s^3} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_i \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{ow} = 0 \Leftrightarrow s = 0$$



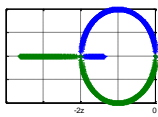
Regulator PD – może być stosowany

$$R(s) = k_p + k_d s = k_d (s + z) \quad \text{gdzie } z = \frac{k_p}{k_d}$$

$$G_{otw} = \frac{s+z}{s^2} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{s+z}{s^2} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_p \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = -z$$

DANE: czas regulacji t_r , przebiegi aperiodyczne krytyczne



$$k_p = \frac{36}{k_o \cdot t_r^2}, \quad k_d = \frac{12}{k_o \cdot t_r}$$

$$F(s) = \frac{1}{k_p s + 1}$$

Dla PD występuje przeregulowanie około 15% => wymagany filtr wstępny

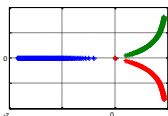


Regulator PI – układ niestabilny

$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \frac{s+z}{s} \quad \text{gdzie } z = \frac{k_i}{k_p}$$

$$G_{otw} = \frac{s+z}{s^2} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{s+z}{s^2} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_p \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{2}z \quad (\text{obszar w którym nie ma linii pierwiastkowych})$$

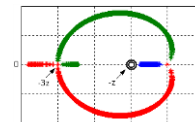


Regulator PID – może być stosowany

$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_i \frac{(s+z)^2}{s} \quad \text{gdzie } k_p = 2z^2 k_i, \quad k_i = z^2 k_i, \quad k_d = k_i$$

$$G_{otw} = \frac{(s+z)^2}{s^3} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{(s+z)^2}{s^3} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_i \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = -3z \vee s = -z$$



DANE: czas regulacji t_r , przebiegi aperiodyczne krytyczne

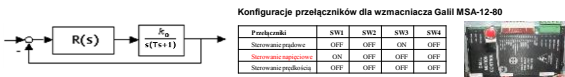
$$k_p = \frac{216}{k_o \cdot t_r^3}, \quad k_i = \frac{432}{k_o \cdot t_r^2}, \quad k_d = \frac{27}{k_o \cdot t_r}$$

Dla PID występuje przeregulowanie około 20% => wymagany filtr wstępny



$$F(s) = \frac{1}{k_p s + 1}$$

Podstawowe regulatory położenia dla silników sterowanych napięciowo



Konfiguracja przełączników dla wzmacniacza Galilii MSA-12-80

Przełączniki	SW1	SW2	SW3	SW4
Stawianie/przebiegi	OFF	OFF	ON	OFF
Stawianie/przebiegi	ON	OFF	OFF	OFF
Stawianie/przebiegi	OFF	OFF	OFF	OFF

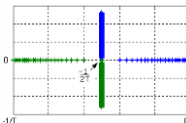


Regulator P – brak wpływu na $t_r=12T$

$$R(s) = k_p \quad G_{otw} = \frac{1}{s(Ts+1)} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{1}{s(Ts+1)} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_p \cdot k_o$$

$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{1}{2T}$$

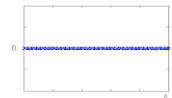
$$k_p = \frac{1}{4Tk_o}$$



Regulator PD – może być stosowany

$$R(s) = k_p + k_d s = k_d (s + z) \quad \text{gdzie } z = \frac{k_p}{k_d} \quad \text{Eliminacja stałej czasowej: } z = \frac{1}{T}$$

$$G_{otw} = \frac{1}{s} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{1}{s} = 0 \quad \text{gdzie } k = \frac{k_d \cdot k_o}{T}$$



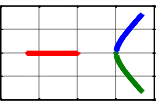
DANE: czas regulacji t_r , przebiegi aperiodyczne krytyczne

$$k_p = \frac{4}{k_o \cdot t_r}, \quad k_d = \frac{4T}{k_o \cdot t_r}$$

Regulator I – układ niestabilny

$$R(s) = \frac{k_i}{s} \quad G_{otw} = \frac{1}{s^2(Ts+1)} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{1}{s^2(Ts+1)} = 0 \quad \text{gdzie } k = k_i \cdot k_o$$

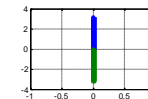
$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = 0 \vee s = -\frac{2}{3} \frac{1}{T} \quad (\text{obszar w którym nie ma linii pierwiastkowych})$$



$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \frac{s+z}{s} \quad \text{gdzie } z = \frac{k_i}{k_p} \quad \text{Eliminacja stałej czasowej: } z = \frac{1}{T}$$

$$G_{otw} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{1}{s^2} = 0 \quad \text{gdzie } k = \frac{k_p \cdot k_o}{T}$$

$$\frac{d}{ds} G_{otw} = 0 \Leftrightarrow s = 0$$



Regulator PI – bez eliminacji stałej czasowej

$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \frac{s+z}{s} \text{ gdzie } z = \frac{k_i}{k_p}$$

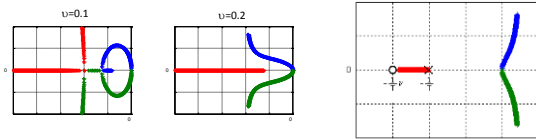
$$G_{ob} = \frac{k_o}{s(Ts+1)} = \frac{k_o}{T} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{T})}$$

Zakładamy, iż zero z jest dane zależnością $z = \frac{1}{T} \cdot \nu$ gdzie ν jest liczbą rzeczywistą dodatnią

$$G_{ov} = \frac{s+\nu}{s^2} \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{s+\nu}{s^2} = 0 \text{ gdzie } k = \frac{k_p \cdot k_o}{T}$$

Dla $0 < \nu < 1$

Dla $\nu > 1$



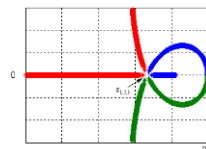
Dopuszczalny zakres $0 < \nu < 1$

$$\frac{d}{ds} G_{ov} = 0 \Leftrightarrow 2s^2 + \frac{1+3\nu}{T}s + \frac{2\nu}{T^2} = 0 \quad \Delta = \frac{1}{T^2} (9\nu^2 - 10\nu + 1) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9\nu^2 - 10\nu + 1} \cdot \frac{1}{T}$$

Punkty rozdzielni i spotkań: $s_{1,2} = \left(-1 - 3\nu \pm \sqrt{9\nu^2 - 10\nu + 1} \right) \cdot \frac{1}{4T}$ rzeczywiste $9\nu^2 - 10\nu + 1 \geq 0$

$$\nu \in \left(0, \frac{1}{9} \right) \cup \left(1, \infty \right)$$

Gdy $9\nu^2 - 10\nu + 1 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{1}{9} \Rightarrow s_{1,2,3} = -\frac{1+3\nu}{4T} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{T}$ potrójny punkt spotkania linii



Nastawy

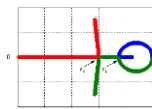
$$z = \frac{1}{9T} \quad k_p = \frac{1}{3T k_o}, \quad k_i = \frac{1}{27T^2 k_o}$$

Brak wpływu na czas regulacji $t_r = 24T$

Występuje przeregulowanie około 20% => wymagany filtr wstępny

$$F(s) = \frac{1}{k_p s + 1}$$

Gdy $9\nu^2 - 10\nu + 1 > 0 \Rightarrow \nu \in \left(0, \frac{1}{9} \right)$ dwa punkty spotkania linii

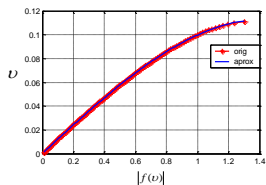


$$\text{Strojenie dla } s_1 = \left(-1 - 3\nu + \sqrt{9\nu^2 - 10\nu + 1} \right) \cdot \frac{1}{4T} = f(\nu) \cdot \frac{1}{4T}$$

Czas regulacji

$$t_r = \frac{6}{|s_1|} = \frac{24T}{|-1 - 3\nu + \sqrt{9\nu^2 - 10\nu + 1}|} = \frac{24T}{|f(\nu)|} \text{ gdzie } f(\nu) = -1 - 3\nu + \sqrt{9\nu^2 - 10\nu + 1}$$

Na podstawie zakładanego czasu regulacji t_r należy wyznaczyć $|f(\nu)| = \frac{24T}{t_r}$ a następnie z nomogramu $|f(\nu)|$ wartość ν



Matlab

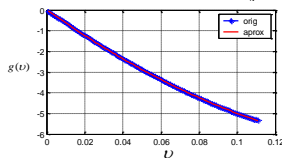
```
mi=0.001;0.0013;/;
Fs=abs(1.3*mi*exp(9*pi*mi-10*pi*mi-1));
pr=polymfit(m,3);
mi_aprox=pr(1)*nu^3+pr(2)*nu^2+pr(3)*nu+pr(4);
plot(mi,Fs,mi_aprox,grid);
legend('orig','aprox');
```

Aproksymacja

$$\nu = -0.0192 \cdot |f(\nu)|^3 - 0.0021 \cdot |f(\nu)|^2 + 0.1208 \cdot |f(\nu)| + 0.0003$$

Wyznaczenie k

$$1+k \cdot \frac{s+\nu}{s^2} \cdot \frac{1}{T} = 0 \Rightarrow k = -\frac{s^2(s+\frac{1}{T})}{s+\nu} \Big|_{s=-1-|f(\nu)| \cdot \frac{1}{4T}} = -\frac{|f(\nu)|^2 \cdot (4-|f(\nu)|)}{16T^2(4\nu-|f(\nu)|)} = -g(\nu) \cdot \frac{1}{16T^2}, \quad g(\nu) = \frac{|f(\nu)|^2 \cdot (4-|f(\nu)|)}{4\nu-|f(\nu)|}$$



Aproksymacja

$$g(\nu) = 153.6727\nu^2 - 65.5115\nu + 0.0167$$

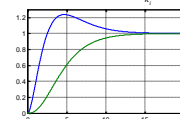
Przykład

Dane	Wyniki
$k_o=10.5$	$k_p=0.0608$
$T=0.5$	$k_i=0.0126$
$t_r=22.6 \cdot T=11.3$ sek.	$t_r=12.45$ sek.
	$P_n=23.6\%$

Algorytm strojenia

- $|f(\nu)| = \frac{24T}{t_r}$
- $\nu = -0.0192 \cdot |f(\nu)|^3 - 0.0021 \cdot |f(\nu)|^2 + 0.1208 \cdot |f(\nu)| + 0.0003$
- $k = -g(\nu) \cdot \frac{1}{16T^2}$ $g(\nu) = 153.6727\nu^2 - 65.5115\nu + 0.0167$
- Nastawy $k_p = \frac{k \cdot T}{k_o}, \quad k_i = \frac{k \cdot \nu}{k_o}$

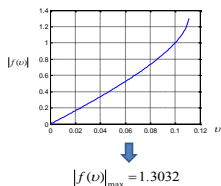
Filtr wstępny $F(s) = \frac{1}{k_p s + 1}$



Jaki najkrótszy czas regulacji można osiągnąć ?

$$|f(\omega)| = \frac{24T}{t_r} \Rightarrow t_r \downarrow \Rightarrow |f(\omega)| \uparrow$$

$$t_r \geq \frac{24T}{|f(\omega)|_{\max}} \Rightarrow t_r \geq 18.4T$$



Teoretyczne oszacowania dają dla potrójnego punktu spotkania linii $t_r=24T$ zaś dla dwóch punktów spotkań linii $t_r > 18.4T$

Eksperymenty wykazują, iż dla dwóch punktów spotkań linii uzyskuje się najkrótszy rzeczywisty czas regulacji równy $t_r > 22.6T$

Dla potrójnego punktu spotkania linii uzyskuje się proste analityczne zależności dla strojenia. W przypadku dwóch punktów spotkań linii, rzeczywiste skrócenie czasu regulacji, dla niewielkich wartości stałej czasowej obiektu T_r , jest niewielkie, zaś algorytm wyznaczenia nastaw jest mniej wygodny do zastosowania

Regulator PID – może być stosowany

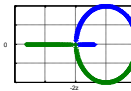
$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \frac{(s+z)(s+z_1)}{s}$$

$$G_{osw} = \frac{s+z}{s^2} \Rightarrow 1+k \cdot \frac{s+z}{s^2} = 0 \text{ gdzie } k = \frac{k_p \cdot k_o}{T}$$

(jak regulator PD dla silnika sterowanego prądowo)

Eliminacja stałej czasowej: $z_1 = \frac{1}{T}$

$$\frac{d}{ds} G_{osw} = 0 \Leftrightarrow s = -2z$$



$$t_r = \left. \frac{6}{|s_2|} \right|_{s_2 = -2z} = \frac{3}{z} \quad k = -\frac{s^2}{s+z} \Big|_{s=-2z} = 4z \Rightarrow k_p = \frac{k \cdot T}{k_o} = \frac{4z \cdot T}{k_o} = \frac{12 \cdot T}{k_o \cdot t_r}$$

Nastawy

$$k_p \frac{(s+z)(s+z_1)}{s} = k_p \frac{s^2 + (z+z_1)s + z \cdot z_1}{s} = k_d \frac{s^2 + \frac{k_p}{k_d} s + \frac{k_i}{k_d}}{s} \Rightarrow k_d = k_p, \quad \frac{k_p}{k_d} = z+z_1, \quad \frac{k_i}{k_d} = z \cdot z_1$$

(analityczne rozwiązanie - utrudnione)

$$k_p = k_o \cdot t_r \left(\frac{3}{T} + \frac{1}{t_r} \right) = \frac{12 \cdot t_r + 3T}{k_o \cdot t_r^2}$$

Nastawy

$$k_p = \frac{12 \cdot t_r + 3T}{k_o \cdot t_r^2}, \quad k_i = \frac{36}{k_o \cdot t_r^2}, \quad k_d = \frac{12T}{k_o \cdot t_r}$$

Występuje przeregulowanie około 14% => wymagany filtr wstępny

$$G_{zmk} = \frac{k(s+z)}{s^2+k(s+z)} \rightarrow F(s) \rightarrow R(s) \rightarrow \frac{k_o}{s(s+1)} \rightarrow F(s) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{\frac{T_r}{3} + 1}$$

Dobór regulatora położenia dla serwomechanizmów ze względu na stabilność i możliwość uzyskania przebiegów aperiodycznych krytycznych

Serwomechanizmy

$$G(s) = \frac{k}{s^2}$$

PD, PID

Sterowanie prądowe

Sterowanie napięciowe

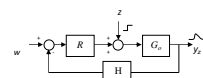
$$G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$$

P, PD, PI, PID

Dokładność układów regulacji

Błąd ustalony dla wartości zadanej

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$



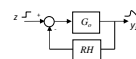
$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (W(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (1 - G_{zmk}(s)) W(s)$$

Układ automatyki powinien wiernie odtwarzać wielkość zadaną w stanie ustalonym

Eliminacja zakłóceń wejścia obiektu (np. tarcie) w stanie ustalonym

Chodzi o to, aby po pewnym czasie układ w pełni zlikwidował oddziaływanie nadal istniejącego zakłócenia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_z(t) = 0$$



O całkowitej dokładności układu decyduje wierne odtwarzanie wartości zadanej w stanie ustalonym oraz zdolność do eliminacji zakłóceń

O dokładnym odtwarzaniu wartości zadanej decyduje sumaryczna liczba całkowań w TORZE GŁÓWNYM

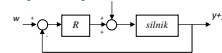
(nie ma znaczenia czy całkowanie wprowadza obiekt czy regulator, sprzężenie jednostkowe jest istotne)

O eliminowaniu zakłóceń decyduje liczba całkowań w REGULATORZE (sprzężenie jednostkowe nie jest istotne)

Wartość zadana	Liczba całkowań w TORZE GŁÓWNYM	Zakłócenie wejścia obiektu	Liczba całkowań w REGULATORZE
skokowa	1	skokowe	1
liniowa	2	liniowe	2
paraboliczna	3	paraboliczne	3

Dobór regulatora dla serwomechanizmów ze względu na dokładność odtwarzania wartości zadanej i kompensację zakłóceń skokowych wejścia obiektu

Serwomechanizmy



Wymuszenia, Zakłócenia - skokowe (tarcie Coulomba, tarcie wiskotyczne dla ruchu ze stałą prędkością)	Sterowanie napięciowe	Sterowanie prądowe
	$G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$	$G(s) = \frac{k}{s^2}$
$w(t) = 1(t) \Rightarrow W(s) = \frac{1}{s}$	PI, PID	PID
$w(t) = t \Rightarrow W(s) = \frac{1}{s^2}$	PI, PID	PID
$w(t) = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow W(s) = \frac{1}{s^3}$	PII ² D	PID