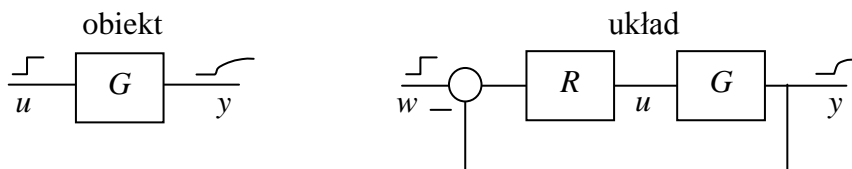


# Układy ze sprzężeniem zwrotnym - właściwości, stabilność i dokładność

## 1. Właściwości układów ze sprzężeniem zwrotnym

### 1.1. Wzrost szybkości reakcji

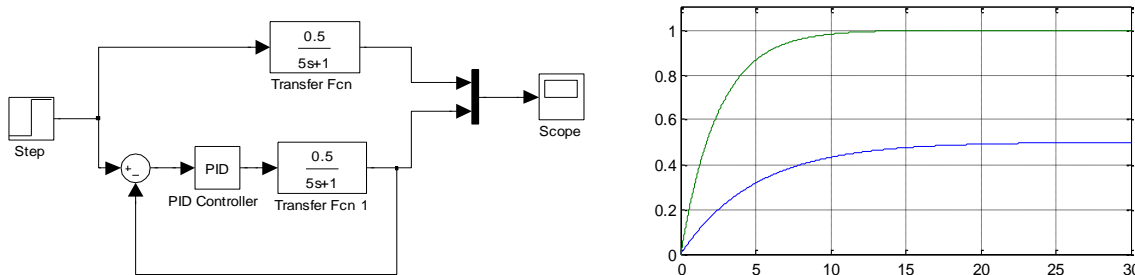


$$\frac{Y}{W} = \frac{RG}{1+RG} = \frac{1}{\frac{1}{RG} + 1} \cong 1, \quad \text{pod warunkiem, że } |RG| \gg 1$$

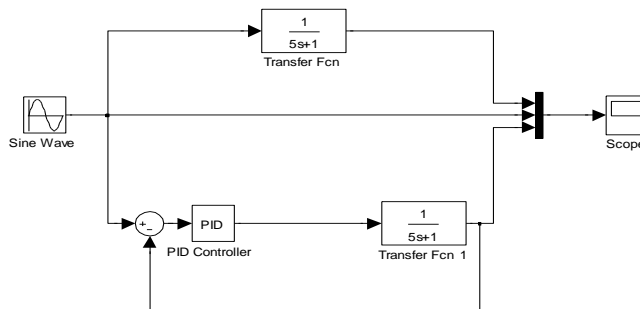
W zakresie częstotliwości gdzie  $|R(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$  układ ze sprzężeniem zwrotnym zapewnia szybkie śledzenie wielkości zadanej.

Jest to zakres  $[0, \omega_M]$ , gdzie  $\omega_M$  stanowi granicę częstotliwości technologicznie użytecznych.

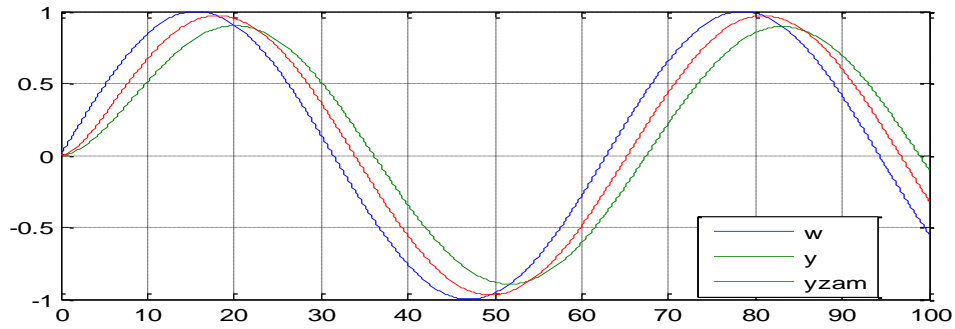
Przykład wzrost szybkości reakcji :  $t_r = 10 \Rightarrow PI = 4 + \frac{0.8}{s}$



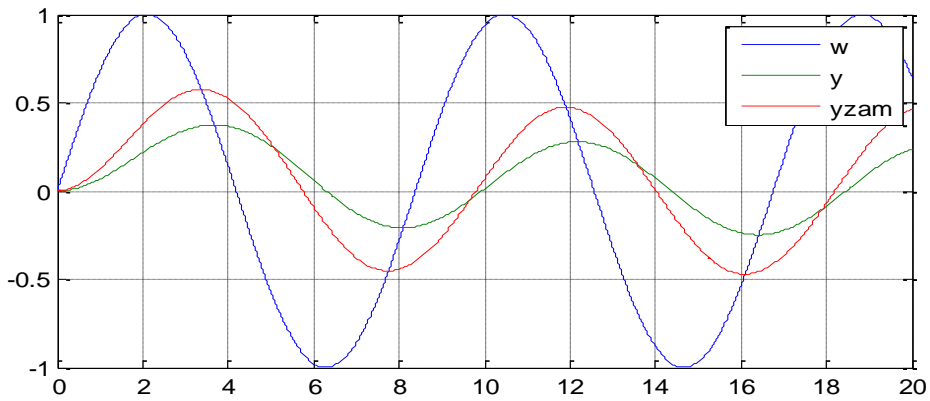
Przykład śledzenie wielkości zadanej :  $t_r = 10 \Rightarrow PI = 2 + \frac{0.4}{s}$



$$\omega = 0.1 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$$

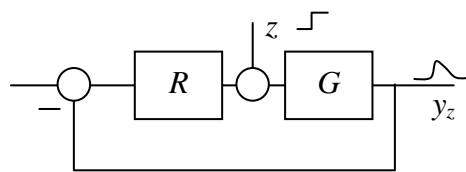
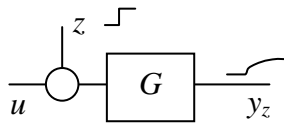


$$\omega = 0.75 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$$



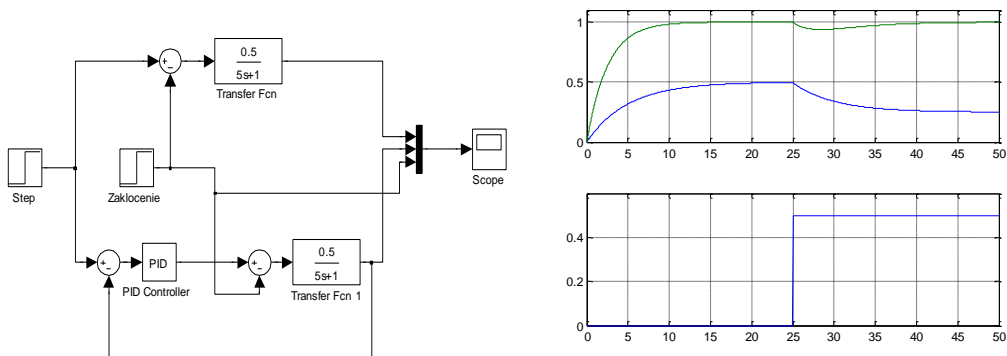
## 1.2. Tłumienie zakłóceń

### 1) Zakłócenie wejścia obiektu (typowe)

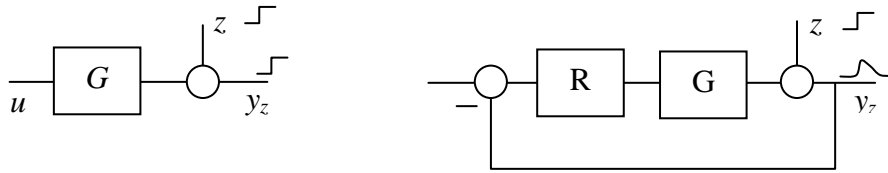


$$\frac{Y_z}{Z} = \frac{G}{1 + RG} \approx 0, \quad \text{dla } |RG| \gg 1$$

Przykład



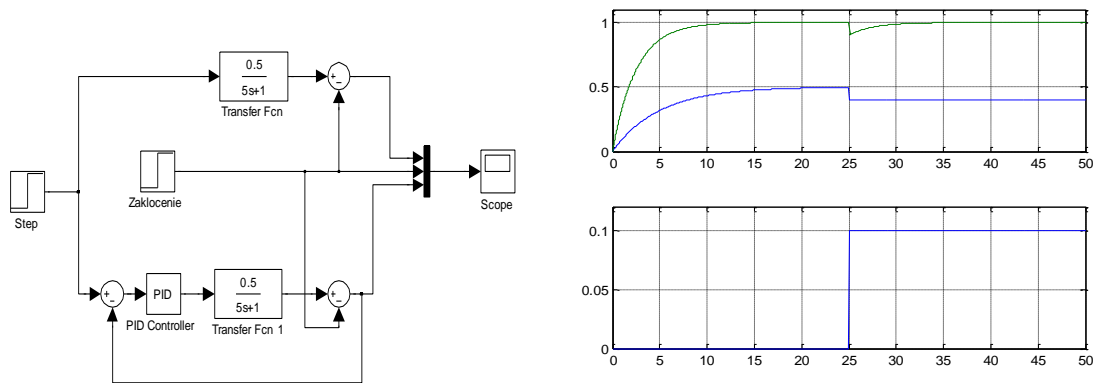
2) Zakłócenie wyjścia



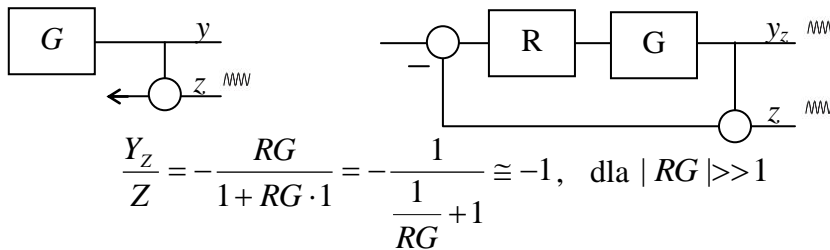
$$\frac{Y_z}{Z} = \frac{1}{1 + RG} \approx 0, \quad \text{dla } |RG| \gg 1$$

Zakłócenia wejścia lub wyjścia obiektu są silnie tłumione.

Przykład



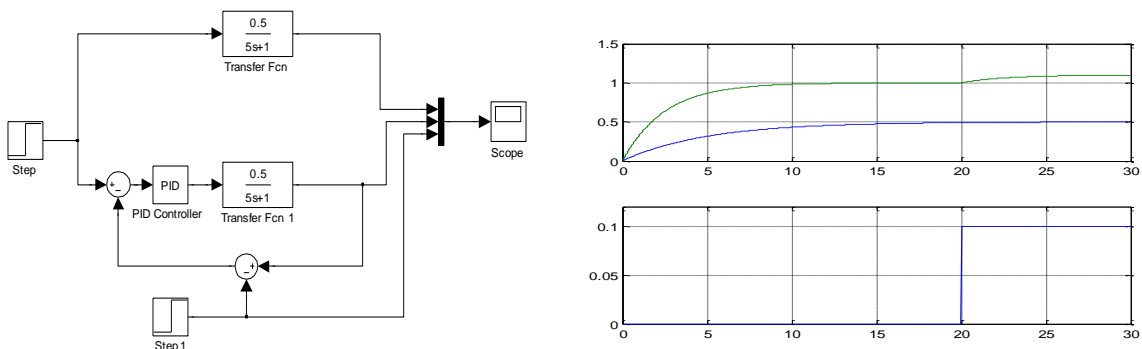
3) Błędy pomiarowe



$$\frac{Y_z}{Z} = -\frac{RG}{1 + RG \cdot 1} = -\frac{1}{\frac{1}{RG} + 1} \cong -1, \quad \text{dla } |RG| \gg 1$$

Układ ze sprzężeniem zwrotnym nie jest w stanie zniwelować wpływu błędów pomiarowych. Pomiary w automatyce powinny być pewne, dokładne, bez dryfu.

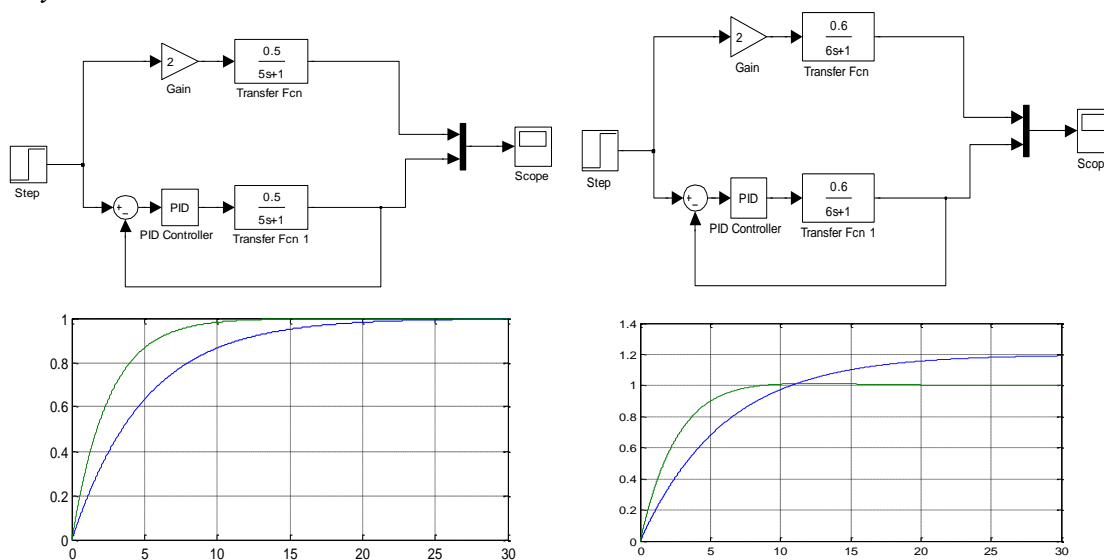
Przykład



### 1.3. Odporność na zmiany parametrów i niedokładności

Każdy obiekt z czasem zmienia swoje właściwości na skutek drobnych przypadkowych zmian, bądź starzenia. Dzięki sprzężeniu zwrotnemu wpływ tych zmian na zachowanie układu zostaje wyraźnie zmniejszony. Układ ma cechy bliskie pierwotnym (nie trzeba natychmiast podejmować czynności konserwacyjnych, remontów itp).

Przykład



## 2. Dynamika i stabilność układu ze sprzężeniem zwrotnym

**Bieguny i zera transmitancji układu zamkniętego decydują o kształcie odpowiedzi skokowej układu**

**Bieguny rzeczywiste różne**

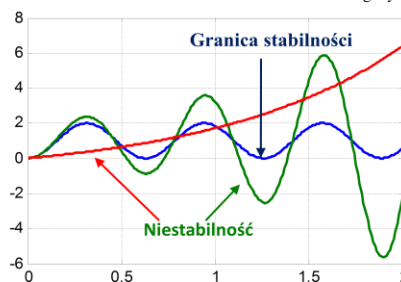
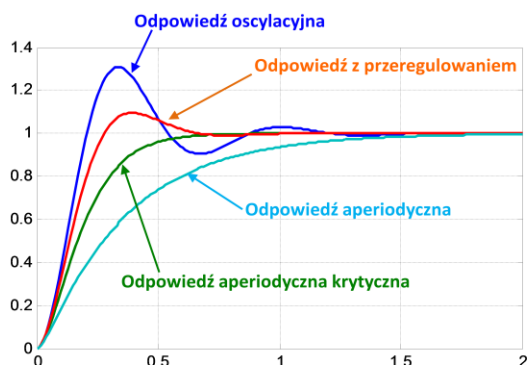
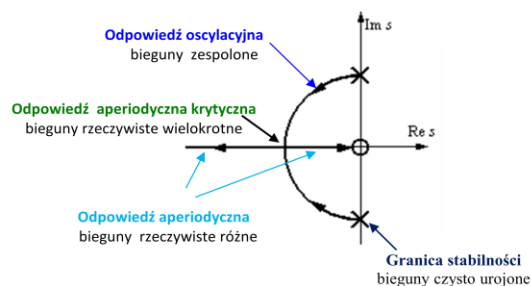
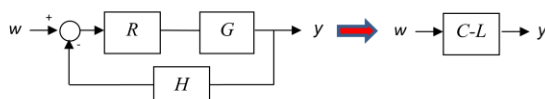
$$y(t) = R_0 \cdot 1(t) + R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \dots$$

**Bieguny rzeczywiste wielokrotne**

$$y(t) = R_0 \cdot 1(t) + \dots + R_1 e^{p t} + R_2 t e^{p t} + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p t}$$

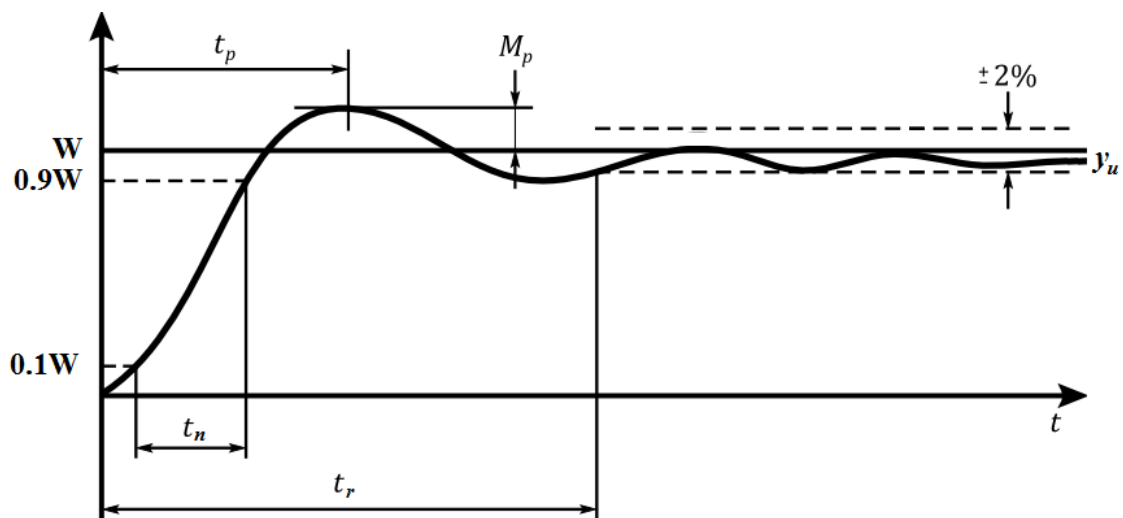
**Bieguny zespolone różne**

$$y(t) = R_0 1(t) + \dots + \sqrt{S^2 + C^2} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi), \quad s = \sigma \pm j\omega$$



## Parametry stabilnej odpowiedzi skokowej

$$w(t) = W \cdot 1(t)$$



Przeregulowanie (overshoot):  $P\%$

$$P\% = \frac{\max(y) - W}{W} \cdot 100\%$$

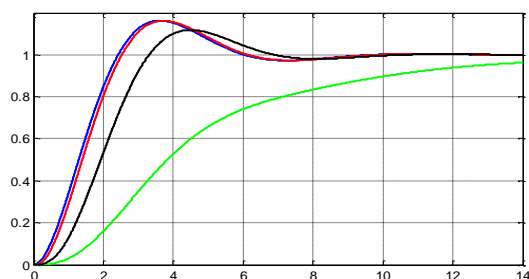
Czas regulacji (settling time) –  $t_r$  ( $t_s$ )

Czas narastania (rise time) –  $t_n$  ( $t_r$ )

Błąd (uchyb) ustalony (steady-state error):  $e_u$  ( $e_{ss}$ ),  $e_u = W - y_u$ ,  $y_u = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

Uwaga

Pojawienie się dodatkowego bieguna w transmitancji układu zamkniętego powoduje wydłużenie czasu regulacji i zwiększenie czasu narastania (niekorzystne), może jednak powodować zmniejszenie przeregulowania (korzystne).

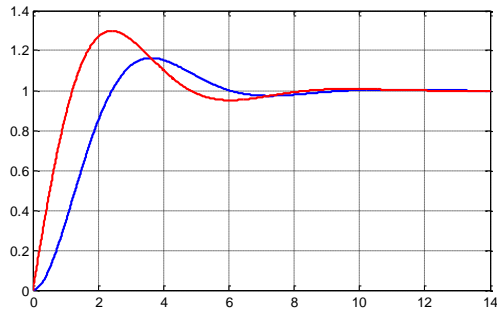


```
L=1;
M=[1 1 1];
roots(M)

t=0:0.01:14;
y=step(L,M,t);
ym=step(L,conv(M,[0.1 1]),t);
ys=step(L,conv(M,[0.7 1]),t);
yd=step(L,conv(M,[4 1]),t);

plot(t,y,'b-',t,ym,'r-',t,yd,'g-',t,ys,'k-');grid
```

Pojawienie się dodatkowego zera w transmitancji układu zamkniętego powoduje wzrost przeregulowania nie wpływając znacząco na czas regulacji (niekorzystne).



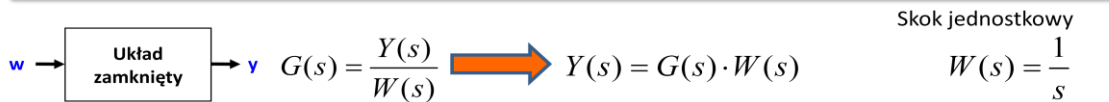
```
L=1;
M=[1 1 1];

roots(M)

t=0:0.01:14;
y=step(L,M,t);
yd=step(conv(L,[1 1]),M,t);

plot(t,y,'b-',t,yd,'r-');grid
```

## STABILNOŚĆ



$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} \Big|_{G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{b(s)}{s \cdot a(s)} \quad G(s) - \text{funkcja wymierna (zera, bieguny)}$$

### Rozkład na ułamki proste

#### Biegunki rzeczywiste różne

$$Y(s) = \frac{b(s)}{s \cdot a(s)} = \frac{b(a)}{s \cdot (s-p_1)(s-p_1)\dots} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \dots \rightarrow y(t) = R_0 \cdot 1(t) + R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \dots$$

#### Biegunki rzeczywiste wielokrotne

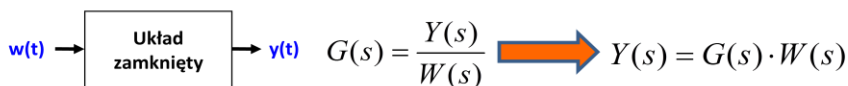
$$Y(s) = \frac{b(s)}{s \cdot a(s)} = \frac{b(a)}{s \cdot a'(s)(s-p)^m} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s-p} + \frac{R_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{R_m}{(s-p)^m} \rightarrow y(t) = R_0 \cdot 1(t) + \dots + R_1 e^{pt} + R_2 t e^{pt} + \frac{1}{2} R_3 t^2 e^{pt} + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{pt}$$

#### Biegunki zespolone różne

$$Y(s) = \frac{b(s)}{s \cdot a(s)} = \frac{b(a)}{s \cdot a''(s)(s-p)(s-p^*)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*} \rightarrow y(t) = R_0 1(t) + \dots + \sqrt{S^2 + C^2} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi), \quad S, C - \text{real}, \quad \phi = \arctg \frac{C}{S}$$

$p = \sigma + j\omega$   
 $p^* = \sigma - j\omega$

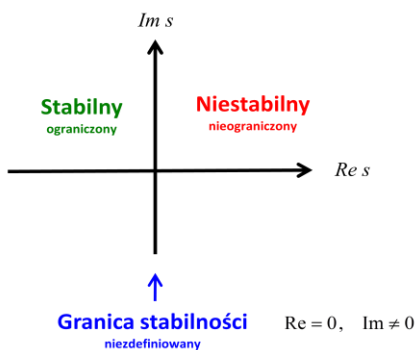
# Stabilność typu BIBO



Dla ograniczonego  $w(t)$  chcemy wiedzieć czy  $y(t)$  jest również ograniczone!

Wartość ustalona  $y(t)$  może być: **stała**, niezdefiniowana bądź nieograniczona

**Jeżeli wszystkie bieguny transmitancji układu zamkniętego znajdują się w lewej części płaszczyzny zespolonej, czyli części rzeczywiste wszystkich biegunów są ujemne, to dla ograniczonego sygnału wejściowego sygnał wyjściowy będzie również ograniczony – system jest stabilny w sensie BIBO (Bounded Input Bounded Output)**



Jeżeli transmitancja układu zamkniętego posiada chociaż jeden biegun w prawej części płaszczyzny zespolonej (część rzeczywista dodatnia) wtedy odpowiedź układu będzie dążyła do nieskończoności - układ niestabilny w sensie BIBO

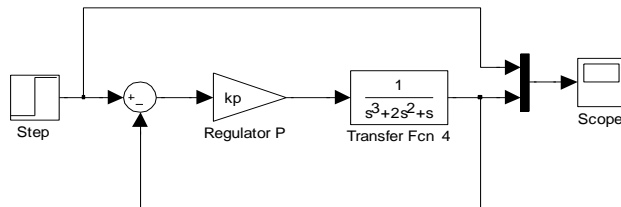
$$Y(s) = \frac{b(s)}{s \cdot a(s)} = \frac{b(a)}{s \cdot (s - p_1)(s - p_2) \dots} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \dots$$

↓  $\Sigma$  (zasada superpozycji)

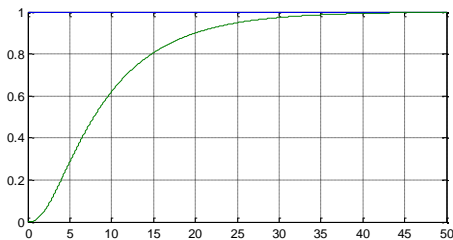
$$y(t) = R_0 \cdot 1(t) + R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \dots$$

**Ogólnie – bieguny układu zamkniętego decydują o stabilności typu BIBO**

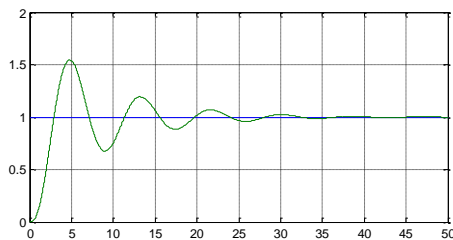
*Przykład* – wpływ parametrów regulatora na stabilność układu



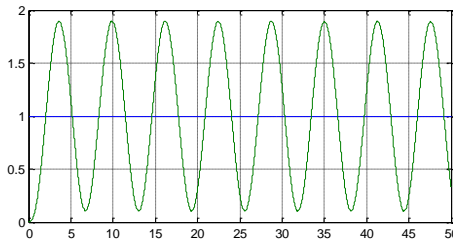
$k_p=0.1$



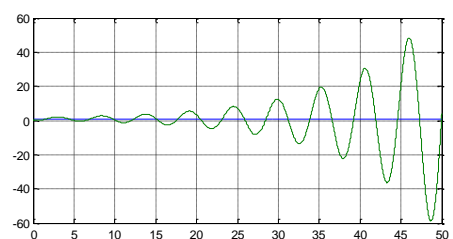
$k_p=1$



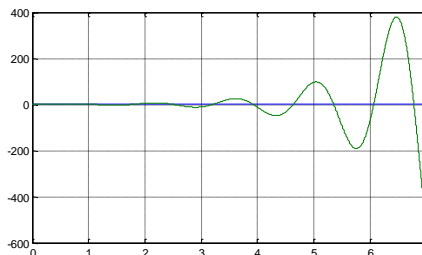
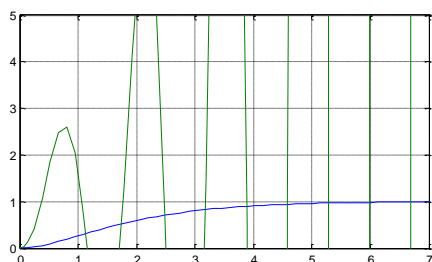
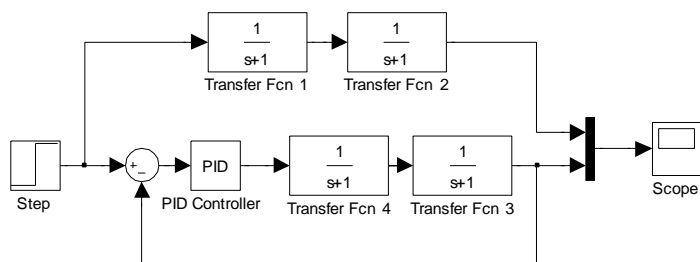
$k_p=2$



$k_p=3$



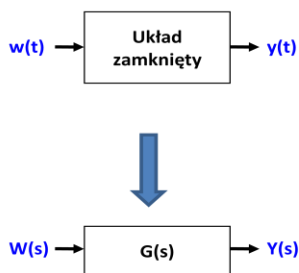
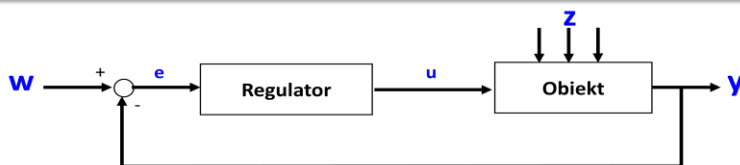
Przykład – obiekt stabilny, układ regulacji niestabilny



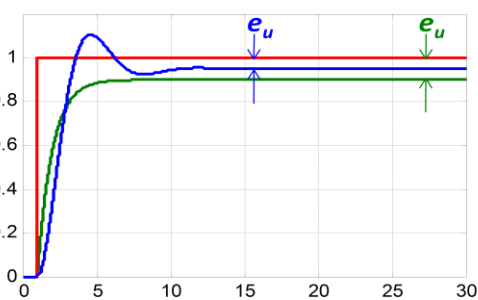
(Film – oś obrabiarki CNC – granica stabilności)

### 3. Dokładność układu ze sprzężeniem zwrotnym

## Dokładność odtwarzania wartości zadanej w układzie z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym



Błędy ustalone



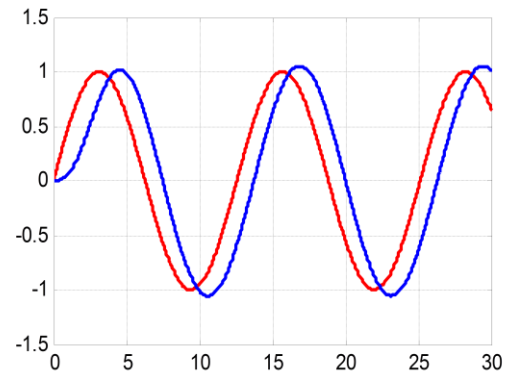
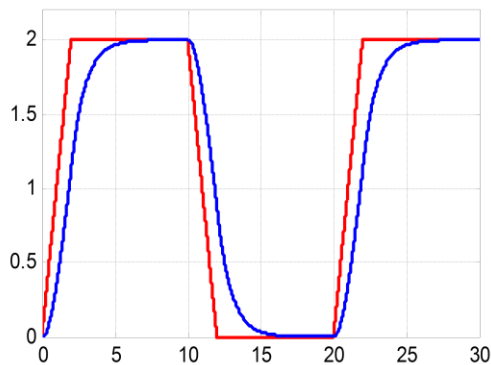
Final Value Theorem

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(W(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s[W(s) - G(s)W(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - G(s)]W(s)$$

$$e(t) = w(t) - y(t) \qquad Y(s) = G(s) \cdot W(s)$$



## Błędy śledzenia wartości zadanej



- **regulacja programowa**

wartość zadana jest znaną z góry funkcją czasu, zmienia się według znanego programu  
 - wykonywanie detali przez obrabiarkę CNC, odtwarzanie trajektorii przez robota

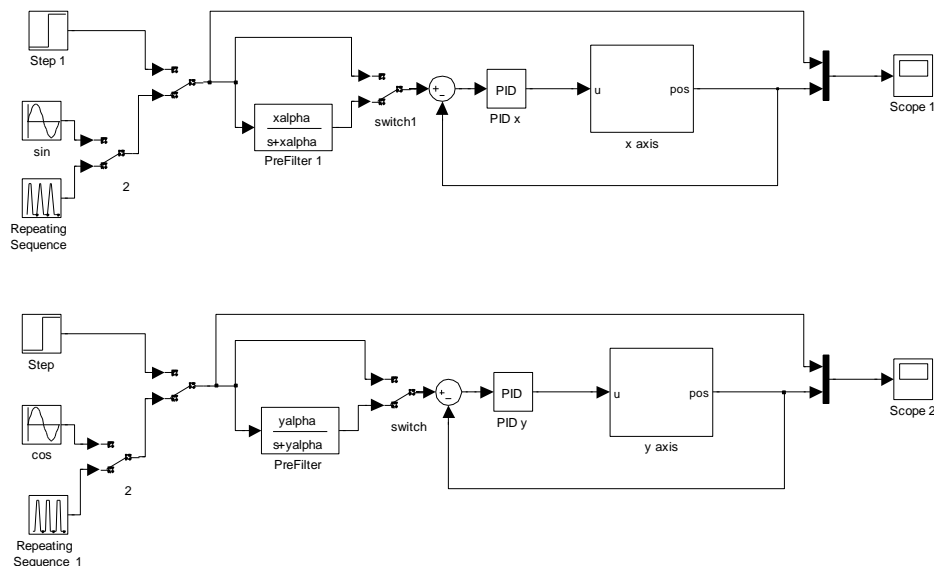
- **regulacja nadążna (układy nadążne lub śledzące)**

wartość zadana nie jest znaną z góry funkcją czasu, ale zależy od zjawisk występujących na zewnątrz układu

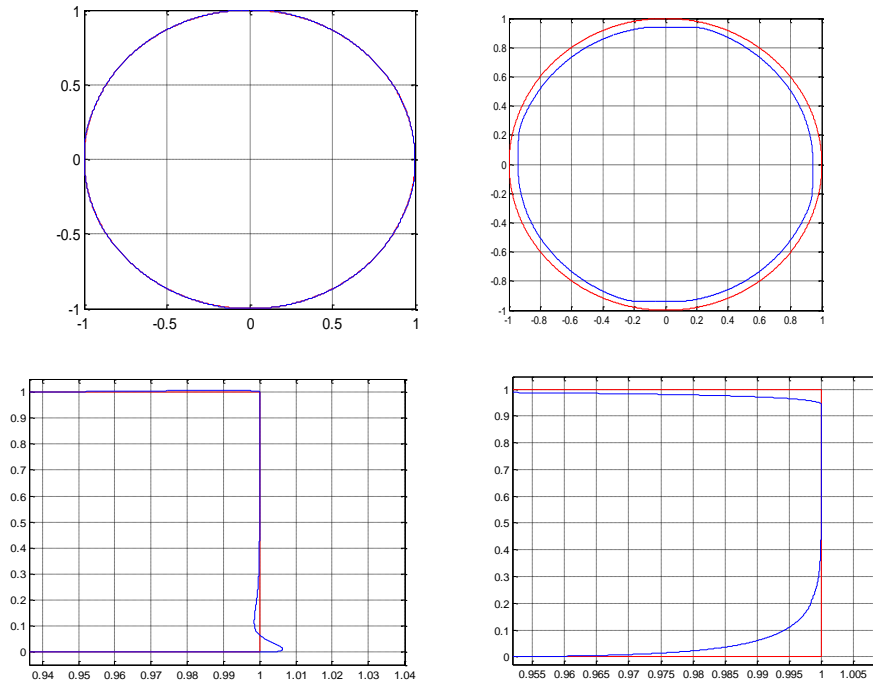
- śledzenie samolotu przez układ radarowy,
- śledzenie obiektu przez kamerę
- układ wspomagający ruch kierowcy w samochodzie

W systemach sterowania obrabiarek CNC zastosowanie regulatorów wprowadzających błędy śledzenia trajektorii wpływa na błędy realizacji detali.

Schemat symulacyjny:

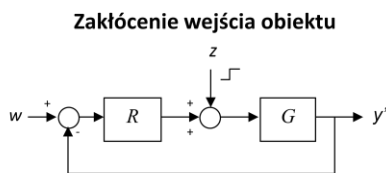


Realizacja trajektorii kołowej i kwadratowej w układzie z filtrem wstępnym i bez filtru.



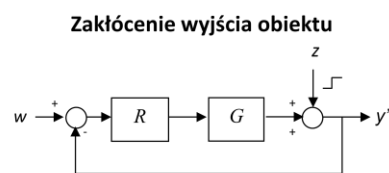
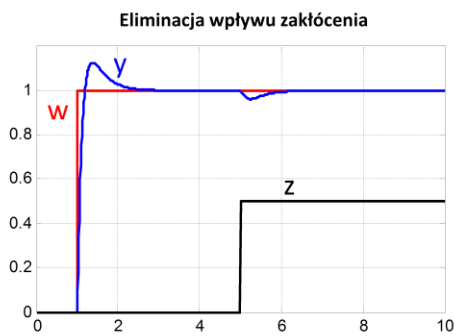
W przypadku realizacji ruchów złożonych (np. obrabiarki CNC) każda z osi powinna posiadać zbliżoną dynamikę (regulatory nastrojone na identyczne czasy regulacji).

## Wpływ zakłóceń na odpowiedź układu ze sprzężeniem zwrotnym – eliminacja

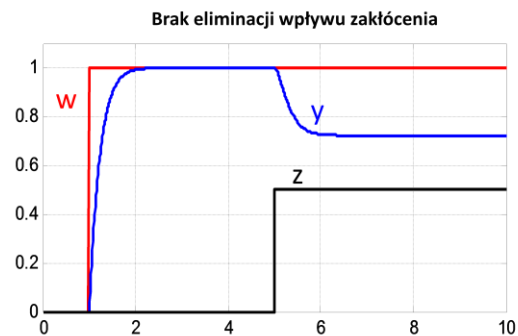
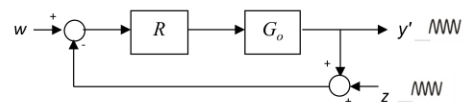


$$y' = y + y_z$$

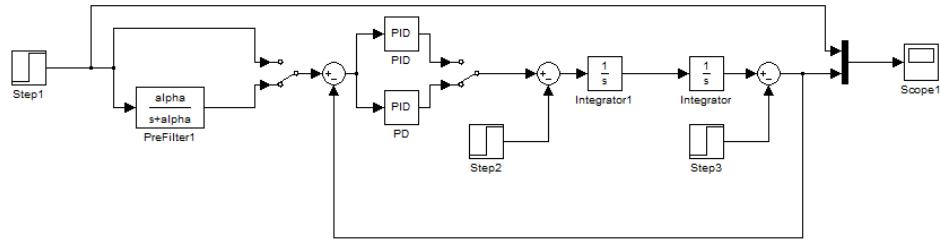
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_z(t) = 0$$



**Zakłócenia toru pomiarowego – brak eliminacji**

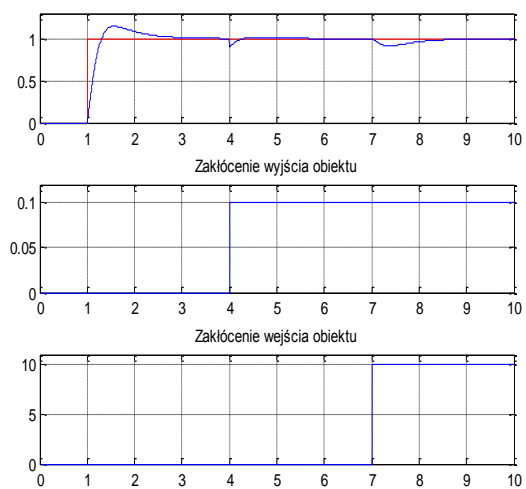
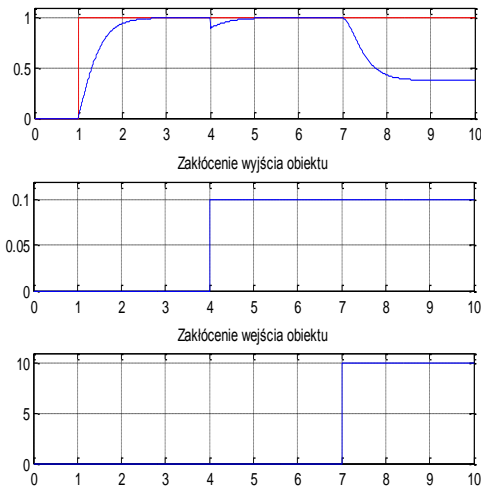


Schemat symulacyjny – dokładność układu a kompensacja zakłóceń

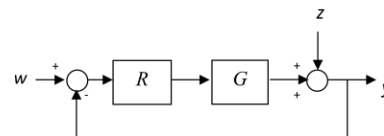
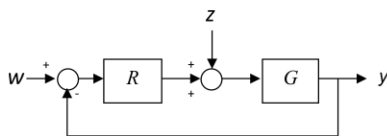


Przykład – PD

Przykład – PID



## Dokładność układów ze sprzężeniem zwrotnym



### Całkowita dokładność układu

- poprawne odtwarzanie wartości zadanej w stanie ustalonym
- eliminacja wpływu zakłóceń na ustaloną odpowiedź układu

W systemie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, odpowiednia liczba całek (integratorów) musi być zapewniona w torze głównym (RG) w celu uzyskania odpowiedzi bez błędów ustalonych dla danego typu wartości zadanej

Aby eliminować w stanie ustalonym wpływ zakłócenia na odpowiedź systemu z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym odpowiednia liczba całek (integratorów) musi poprzedzać punkt wejścia zakłócenia do układu

Wartość zadana w	Liczba całek TOR GŁÓWNY - RG
Skokowa	1
Linowa	2
Paraboliczna	3

Zakłócenie wejścia obiektu z	Liczba całek REGULATOR – R
Skokowe	1
Linowe	2
Paraboliczne	3

„Poprzedzać punkt wejścia” – dotyczy toru głównego.

**Błąd ustalony posiada wartość:** zero albo stałą różną od zera albo nieskończoną.  
Zależy to liczby „brakujących” integratorów w układzie (wykład).

**Zadanie.** Stosując twierdzenie o wartościach granicznych wyprowadź warunki opisane w powyższych tabelkach (wykład).

**Zadanie.** Oblicz błąd ustalony dla zadanego układu regulacji i określonego wymuszenia, np.  $w(t) = 2t^2 + t + 1$  lub zakłócenia.

### Skrypty PRz

L. Trybus, *Teoria Sterowania*, Rzeszów 2005

L. Trybus, T. Żabiński, *Teoria sterowania, Zbiór zadań*, Rzeszów 2009