

Wykład 8

Transformata Laplace'a - przypomnienie, transmitancja operatorowa, schematy blokowe, wprowadzenie do pakietu Matlab/Scilab, regulatory PID - transmitancja, modele matematyczne wybranych obiektów regulacji, przykłady wyprowadzenia transmitancji z potrzebą linearyzacji i bez linearyzacji równań, bilanse: masy, energii, momentu

1. Transformata Laplace'a – przypomnienie

Transformata jednostronna

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$f(t)$ – oryginał spełniający odpowiednie warunki (w naszych rozważaniach spełnione)

$F(s)$ – transformata, s – zmienna zespolona $s = \sigma + j\omega$

Tablica podstawowych własności

| | |
|--|---|
| $af(t) + bg(t), \quad a, b = \text{const}$ | $aF(s) + bG(s)$ |
| $f(at), \quad a = \text{const}$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| $e^{-at}f(t)$ | $F(s + a)$ |
| $f(t - \tau)$ | $e^{-\tau s}F(s)$ |
| $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ | $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ |

Uproszczona tablica podstawowych transform

| | |
|--|-----------------------|
| $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $a \cdot 1(t), \quad a = \text{const}$ | $a \cdot \frac{1}{s}$ |
| $t^n, \quad n - \text{naturalna}$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2!}t^2$ | $\frac{1}{s^3}$ |
| $\frac{1}{6}t^3 = \frac{1}{3!}t^3$ | $\frac{1}{s^4}$ |

| | |
|---|--|
| $e^{-at}, a = const > 0$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $te^{-at}, a = const > 0$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $\frac{1}{2}t^2e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^3}$ |
| $1 - e^{-at}$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $e^{\sigma t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$ |
| $e^{\sigma t} \cos \omega t$ | $\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$ |
| $1 - e^{\sigma t} \left(\cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right)$ | $\frac{\sigma^2 + \omega^2}{s[(s - \sigma)^2 + \omega^2]}$ |

| | |
|---|-----------------------|
| $\frac{1}{T} e^{-\frac{1}{T}t}$ | $\frac{1}{Ts+1}$ |
| $1 - e^{-\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{s(Ts+1)}$ |
| $t - \frac{1}{T} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$ | $\frac{1}{s^2(Ts+1)}$ |
| $1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}}$ | $\frac{1}{s(Ts+1)^2}$ |

| | |
|---|----------------------|
| $\frac{d^n}{dt^n} f(t), n - \text{naturalne}$ | $s^n F(s)$ |
| $\frac{d}{dt} f(t), \text{zerowe warunki początkowe}^*$ | $sF(s)$ |
| $\frac{d^2}{dt^2} f(t), \text{zerowe warunki początkowe}^*$ | $s^2 F(s)$ |
| $\int f(t) dt$ | $\frac{1}{s} F(s)$ |
| $\iint f(t) dt$ | $\frac{1}{s^2} F(s)$ |
| $\iiint f(t) dt$ | $\frac{1}{s^3} F(s)$ |

$$* \frac{d^n}{dt^n} f(t) \rightarrow s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{k-1}(0), * \frac{d}{dt} f(t) \rightarrow sF(s) - f(0), * \frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(0)$$

Przykład 1

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad a, b - \text{const}$$

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t) - \text{obustronnie stosujemy przekształcenie Laplace'a}$$

$$y(t) \hat{=} Y(s), \quad u(t) \hat{=} u(s)$$

$$asY(s) + bY(s) = U(s)$$

$$(as + b)Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as+b} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}s+1} U(s) \quad \text{dla } T = \frac{a}{b}, \quad k = \frac{1}{b}$$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} U(s)$$

$$\text{dla } u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s(Ts+1)}$$

na podstawie tabeli

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Metoda rozkładu na ułamki proste

Pierwiastki jednokrotne rzeczywiste

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + \dots$$

$$R_i = (s - p_i) \cdot F(s)|_{s=p_i} - \text{metoda przesłaniania}$$

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t} + \dots$$

Pierwiastki zespolone

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p_1)(s-p)(s-p^*)\dots} = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R}{s-p} + \frac{R^*}{s-p^*}$$

p_1 - rzeczywisty

$$p = \sigma + j\omega, \quad R = A + jB$$

$$p^* = \sigma - j\omega, R^* = A - jB$$

$$F(s) = \dots + \frac{A+jB}{s-(\sigma+j\omega)} + \frac{A-jB}{s-(\sigma-j\omega)} = \dots + \frac{A+jB}{(s-\sigma)-j\omega} + \frac{A-jB}{(s-\sigma)+j\omega} = \dots + \frac{2A(s-\sigma)-2B\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \dots + \frac{2A(s-\sigma)+(-2B)\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \dots + \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$C = 2A, S = -2B$

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + e^{\sigma t} (C \cos \omega t + S \sin \omega t) = R_1 e^{p_1 t} + e^{\sigma t} \sqrt{S^2 + C^2} \left(\frac{C}{\sqrt{S^2 + C^2}} \cos \omega t + \frac{S}{\sqrt{S^2 + C^2}} \sin \omega t \right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$C \cos \omega t + S \sin \omega t = \sqrt{S^2 + C^2} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctg \frac{C}{S}$$

$$f(t) = R_1 e^{p_1 t} + \sqrt{S^2 + C^2} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi), \quad \phi = \arctg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \arctg \frac{C}{S}$$

$$F(s) = \dots + \frac{C(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \dots + \frac{C(s-\sigma)+S\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \quad - \text{metoda przesłaniania}$$

$$C(s-\sigma) + S\omega|_{s=\sigma+j\omega} = \omega(S + jC) = [(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega}$$

$$S + jC = \frac{1}{\omega} [(s-\sigma)^2 + \omega^2]F(s)|_{s=\sigma+j\omega}$$

Wskazówka

- dla biegunów rzeczywistych odpowiedź to suma funkcji wykładniczych ewentualnie mnożonych przez t^n dla biegunów wielokrotnych
- dla biegunów zespolonych odpowiedź to suma funkcji \sin i \cos z amplitudą modyfikowaną wykładniczo

Nieformalna wskazówka: $p = \sigma + j\omega \rightarrow e^{\sigma t} \cos(\omega t)$

2. Transmitancja operatorowa

- **Transmitancja operatorowa** – stosunek transformaty Laplace’a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace’a sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych



$$\text{DC gain} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) \Big|_{U(s)=\frac{1}{s}} = G(s) \Big|_{s=0}$$

- **Transmitancja widmowa** – stosunek sygnału wyjściowego do wejściowego dla sinusoidalnego sygnału wejściowego

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Uwaga

Pierwiastki licznika transmitancji nazywamy *zerami* zaś pierwiastki mianownika transmitancji nazywamy *biegunami*.

Uwaga

Parametry transmitancji zależą tylko od właściwości obiektu a nie od charakteru sygnału wejściowego.

Przykład 1 – cd.



$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$$

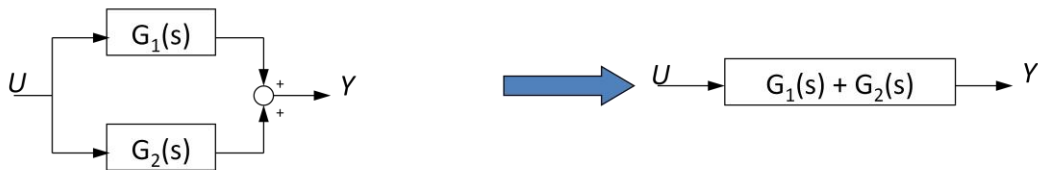
Pytanie: jaka będzie odpowiedź układu na wymuszenie skokowe o amplitudzie równej 2. Wyznacz wartość ustaloną odpowiedzi.

3. Schematy blokowe

Połączenie szeregowe



Połączenie równoległe

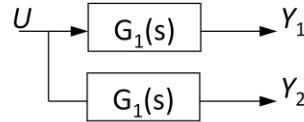
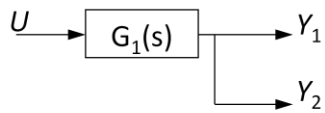
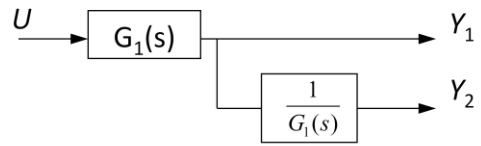
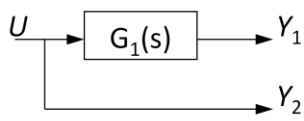


Sprzężenie zwrotne – transmitancja główna

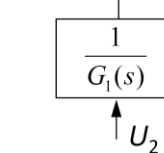
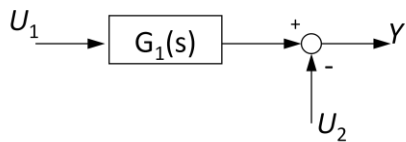
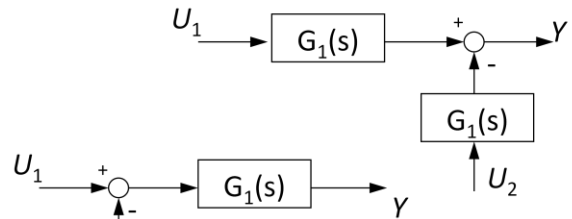
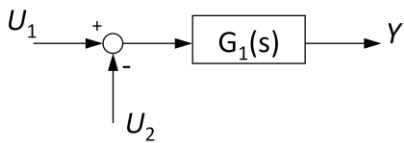


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = ? \quad \begin{cases} Y = RG_o E = RG_o W - RG_o H Y \\ E = W - H Y \end{cases} \Rightarrow \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{RG_o}{1 + RG_o H}$$

Przesuwanie punktu zaczepowego



Przesuwanie sumatora



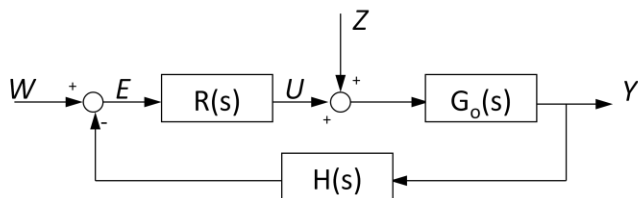
Przekształcenie do jednostkowej pętli sprzężenia zwrotnego



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{G_2} \cdot \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

Transmitancja zakłóceniewa – zakłócenie wejścia obiektu



$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = ?$$

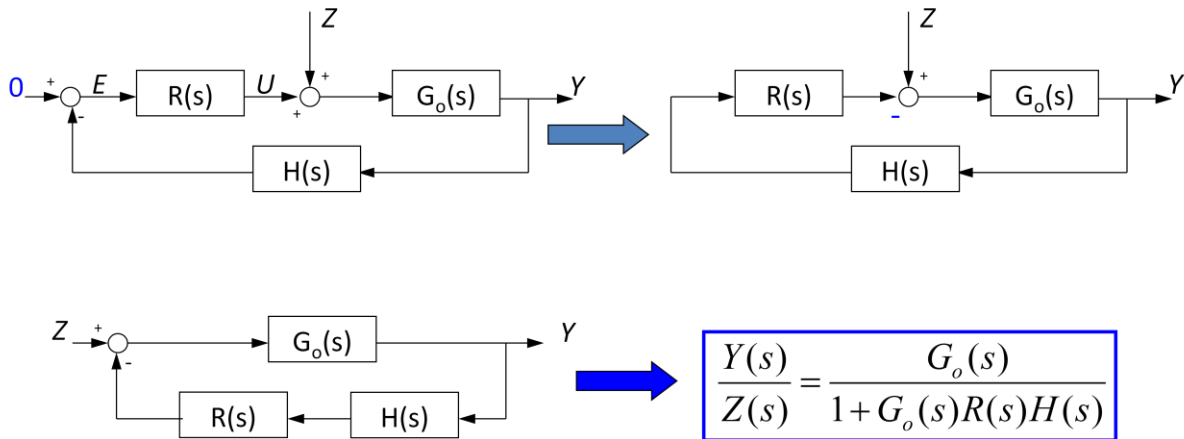
Zasada superpozycji

$$Y = Y_w + Y_z$$

Transmitancja zakłócenia – zakłócenie wejścia obiektu

Oddziaływanie sygnałów W i Z można rozpatrywać niezależnie ze względu na zasadę superpozycji

$W=0$



4. Wprowadzenie do pakietu Matlab/Scilab

Podstawowe instrukcje - Matlab

1. Definiowanie wektora czasu

`t=0:0.1:5;`

2. Definiowanie transmitancji $G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$

`L=[an an-1 a1 a0]`
`M=[bn bn-1 b1 b0]`

3. Odpowiedź transmitancji na sygnał wejściowy w postaci skoku jednostkowego

`y=step(L,M,t);`

4. Wykres

`plot(t,y); grid`

Analogiczne zadania można wykonać w nieodpłatnie dostępnym pakiecie *Scilab* (www.scilab.org).

1. Definiowanie wektora czasu

`t=[0:0.1:5];` bądź `t=0:0.1:5;`

2. Definiowanie transmitancji $G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$

```
s=poly(0,'s'); bqdź s=%s
sys=syslin('c',( a_n * s^n + a_{n-1} * s^{n-1} + ... + a_1 * s + a_0)/( b_n * s^n + b_{n-1} * s^{n-1} + ... + b_1 * s + b_0));
```

3. Odpowiedź transmitancji na sygnał wejściowy w postaci skoku jednostkowego

```
y=csim('step',t,sys);
```

4. Wykres

```
plot2d(t,y); xgrid bqdź plot(t,y); xgrid
```

Przykłady

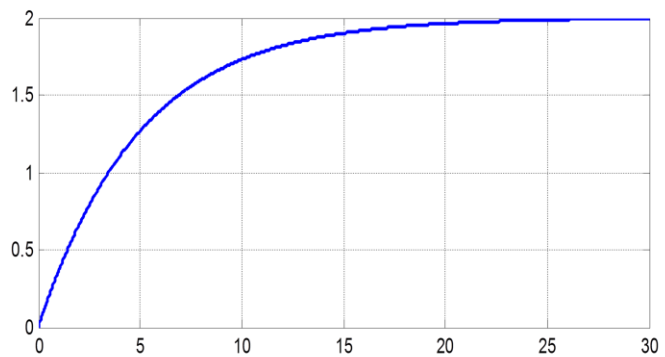
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

Matlab

```
k=2;T=5;
t=0:0.01:6*T;
y=step(k,[T 1],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;T=5;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/(T*s+1));
t=0:0.01:6*T;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



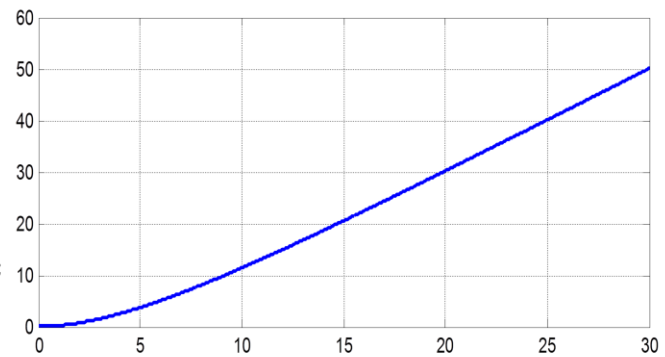
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

Matlab

```
k=2;T=5;
t=0:0.01:6*T;
y=step(k,[T 1 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;T=5;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/(s*(T*s+1)));
t=0:0.01:6*T;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



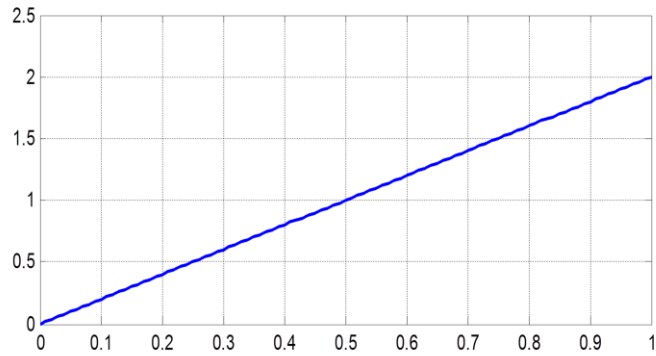
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}$$

Matlab

```
k=2;
t=0:0.01:1;
y=step(k,[1 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/s);
t=0:0.01:1;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



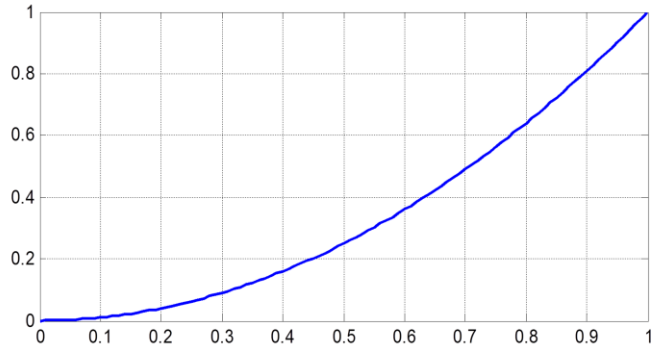
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2}$$

Matlab

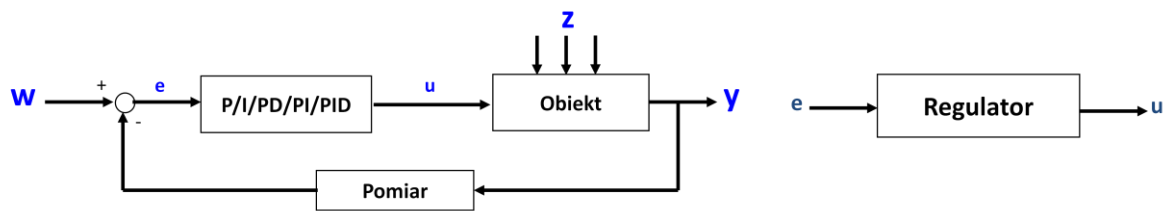
```
k=2;
t=0:0.01:1;
y=step(k,[1 0 0],t);
plot(t,y);grid
```

Scilab

```
k=2;
s=poly(0,'s');
sys=syslin('c',k/s^2);
t=0:0.01:1;
y=csim('step',t,sys);
plot2d(t,y);xgrid
```



5. Regulatory PID – transmitancje



PID – opis w dziedzinie czasu

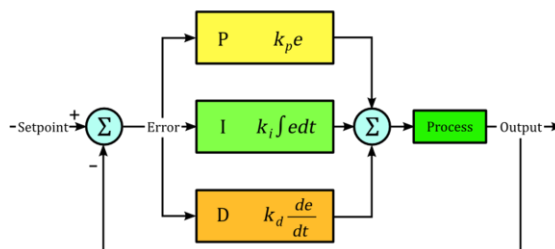
$$P = k_p e$$

$$I = k_i \int edt$$

$$PD = k_p e + k_d \frac{de}{dt}$$

$$PI = k_p e + k_i \int edt$$

$$PID = k_p e + k_i \int edt + k_d \frac{de}{dt}$$



k_p – wzmacnienie czlonu proporcjonalnego

k_i – wzmacnienie czlonu całkującego

k_d – wzmacnienie czlonu różniczkującego

PID - transmitancja

$$P = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p$$

$$I = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s}$$

$$PD = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_d s$$

$$PI = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

PID – opis w dziedzinie czasu

$$PID = k_p \left(e + \frac{1}{T_i} \int e dt + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

PID - transmitancja

$$PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

PID – z „rzeczywisty” różniczkowaniem

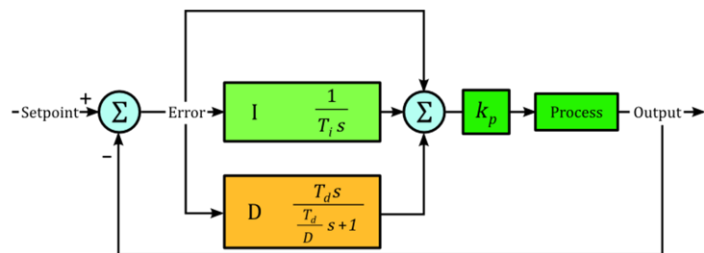
$$PID = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{D} s + 1} \right)$$

k_p – wzmacnienie regulatora

T_i – stała całkowania

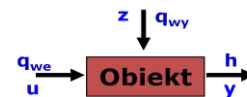
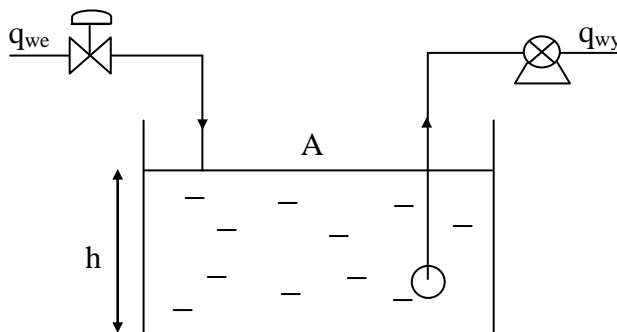
T_d – stała różniczkowania

D – współczynnik

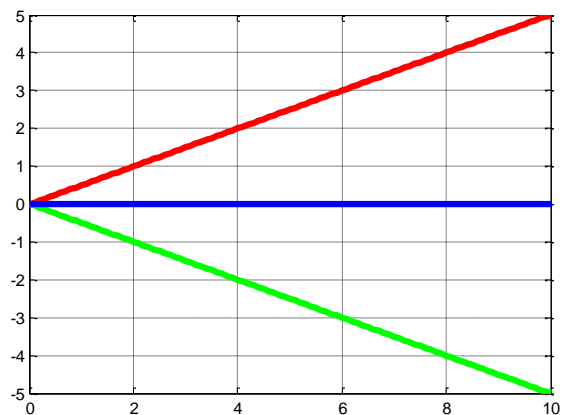


6. Modele matematyczne wybranych obiektów regulacji

Zbiornik z pompą opróżniającą (bilans masy)



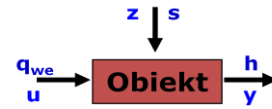
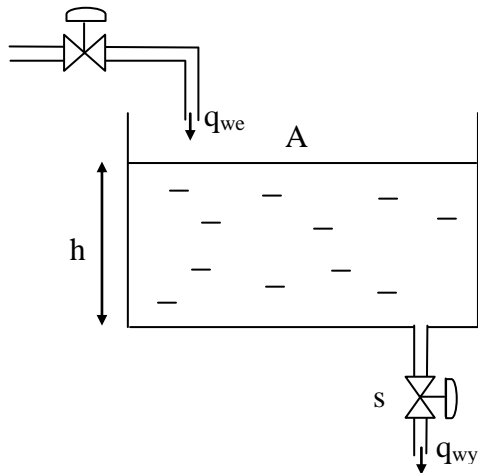
$$H(s) = \frac{Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)}{A s}$$



Matlab

```
L = 1
M = [2 0]
t = 0:0.1:10;
y = step(L,M,t);
L1 = -1
y1 = step(L1,M,t);
plot(t, y, 'r-', t, y1, 'g-', t, y+y1, 'b-'), grid
```

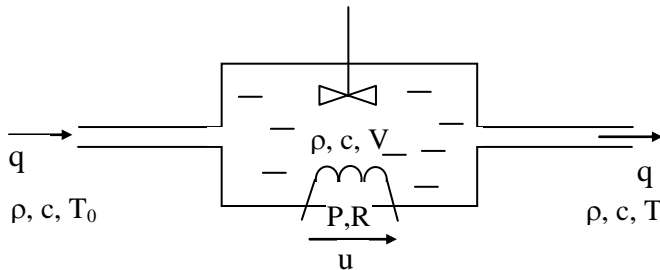
Zbiornik z wypływem pod ciśnieniem hydrostatycznym (bilans masy)



Po linearyzacji (rozwińnięcie w szereg Taylora)

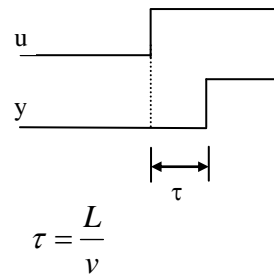
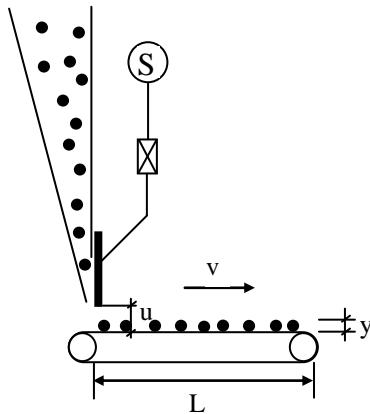
$$\Delta H(s) = \frac{1}{(Ts+1)}(k_1 \Delta Q_{we}(s) - k_2 \Delta S(s))$$

Podgrzewacz elektryczny (bilans energii)



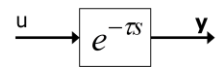
$$\frac{\Delta T(s)}{\Delta U(s)} = \frac{k}{Ts+1}$$

Opóźnienie transportowe w kotle rusztowym



$$y(t) = u(t - \tau)$$

$$Y(s) = U(s) \cdot e^{-\tau s}$$



Uwaga

Transmitancje obiektów technologicznych (energetycznych, chemicznych i in.) należy zwykle uzupełnić o pewne opóźnienie, co daje:

$$\frac{1}{Ts} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{Ts+1} e^{-\tau s}, \quad \frac{1}{(Ts+1)^2} e^{-\tau s}.$$

Bardzo często wartość τ określa się eksperymentalnie.

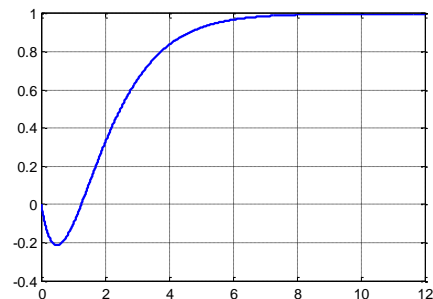
Przybliżenie Padé

$$e^{-\tau s} \cong \frac{2 - \tau s + \frac{1}{2!}(-\tau s)^2 + \frac{1}{3!}(-\tau s)^3 + \dots}{2 + \tau s + \frac{1}{2!}(\tau s)^2 + \frac{1}{3!}(\tau s)^3 + \dots}$$

Przykład – Matlab – instrukcja pade – przybliżenie 1-go rzędu

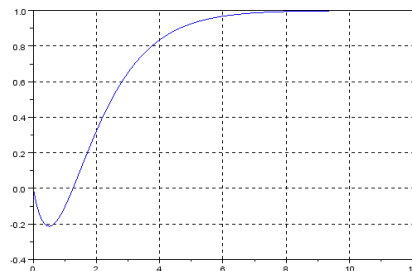
```
L=1;
M=[1 1];
[Lp Mp]=pade(2,1);
Lz=conv(L,Lp);
Mz=conv(M,Mp);
t=0:0.01:12;
y=step(Lz,Mz,t);
plot(t,y);grid
```

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}$$



Przykład – Scilab – aproksymacja opóźnienia - przybliżenie 1-go rzędu

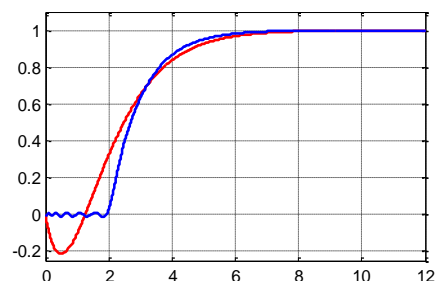
```
s=%s;
sys1= syslin('c',1/(s+1));
delay= syslin('c',(2-2*s)/(2+2*s));
sys=sys1*delay;
t=0:0.01:12;
y=csim('step',t,sys);
plot(t,y);xgrid
```



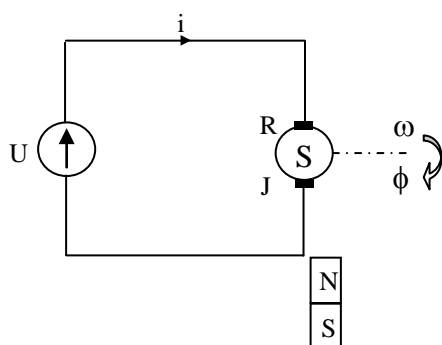
Przykład – Matlab – instrukcja pade – przybliżenie 1-go i 12-go rzędu

```
L=1;
M=[1 1];
[Lp1 Mp1]=pade(2,1);
[Lp12 Mp12]=pade(2,12);
Lz1=conv(L,Lp1);
Mz1=conv(M,Mp1);
Lz12=conv(L,Lp12);
Mz12=conv(M,Mp12);
t=0:0.01:12;
y1=step(Lz1,Mz1,t);
y12=step(Lz12,Mz12,t);
plot(t,y1,'r-',t,y12,'b-');grid
```

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}$$



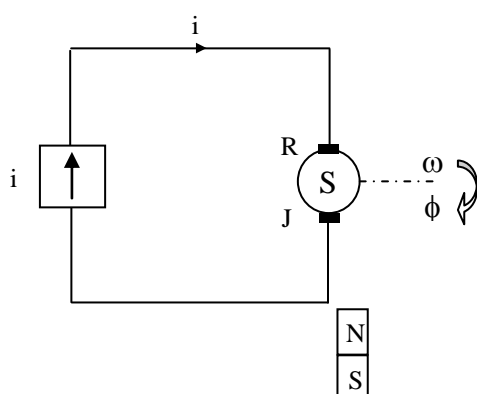
Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – sterowanie napięciowe



$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – sterowanie prądowe



$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}$$

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s^2}$$

7. Proste przykłady wyprowadzenia transmitancji

7.1. Bilans masy

Metodologia Maxwella (1868)

- 1) Ułożyć równania dynamiki układu regulacji i zbadać jak zależą ich rozwiązania od nastaw regulatora występujących we współczynnikach.
- 2) Wybrać takie nastawy, które dają najlepsze rozwiązanie (przebiegi) ze względu na kształt i prędkość.

Punktem wyjścia jest ułożenie równania sterowanego obiektu (model matematyczny). Modelowanie, czyli układanie równań, opiera się o *podstawowe* prawa fizyki, termodynamiki, kinetyki chemicznej itp. Dla potrzeb automatyki wystarcza *umiarkowana dokładność* modelowania. Ważną zaletą układów ze sprzężeniem zwrotnym jest odporność na niedokładności modelowania.

Bilans masy dotyczy wszelkich obiektów z przepływem cieczy, gazów, par, materiałów sypkich – zbiorniki, mieszalniki, kotły, reaktory itp.

$$M = V\rho = Ah\rho,$$

gdzie w przypadku zbiornika:

M - masa cieczy, A - powierzchnia przekroju zbiornika
 V - objętość, h - wysokość słupa cieczy
 ρ - gęstość

Równanie bilansu ma postać

$$\frac{dM}{dt} = A \rho \frac{dh}{dt} = \sum_i q_i \rho_i - \sum_j q_j \rho_j$$

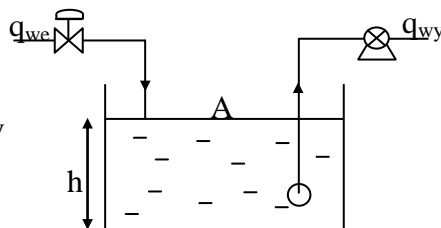
q_i, q_j - przepływy objętościowe (m^3/s)

Zbiornik z pompą opróżniającą

Dane:

$$A = 2 \text{ m}^2$$

$\overline{q_{we}} = \overline{q_{wy}}$ – średnie przepływy



Równanie bilansu

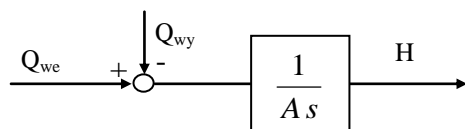
$$\frac{dM}{dt} = A \rho \frac{dh}{dt} = q_{we} \rho - q_{wy} \rho \quad / : \rho$$

$$A \frac{dh}{dt} = q_{we} - q_{wy}$$

Stosujemy transformację Laplace'a

$$A s H(s) = Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)$$

$$H(s) = \frac{Q_{we}(s) - Q_{wy}(s)}{A s} \quad \text{– transmitancja typu całkującego (integrator)}$$



Różnica między dopływem a odpływem powoduje ciągłą zmianę poziomu. Układu sterowania takim obiektem nie wolno wyłączać, bo zbiornik albo zostanie przelany, albo zupełnie opróżniony.

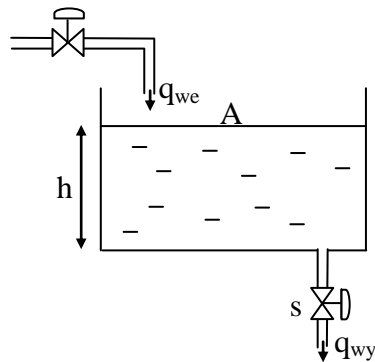
Zbiornik z wypływem pod ciśnieniem hydrostatycznym

Dane:

$$A = 5 \text{ m}^2$$

$$\bar{h} = 10 \text{ m}$$

$$\bar{q}_{we} = \bar{q}_{wy} = 108 \text{ m}^3/\text{h} = 0.03 \text{ m}^3/\text{s}$$



- *Model ogólny (nieliniowy)*

W stanie nominalnym objętość cieczy w zbiorniku nie ulega zmianie.

$$\bar{q}_{we} - \bar{q}_{wy} = 0$$

$$\bar{q}_{wy} = \bar{s} \sqrt{2gh}$$

$$\bar{q}_{we} - \bar{s} \sqrt{2gh} = 0$$

$$\bar{s} = \frac{\bar{q}_{we}}{\sqrt{2gh}} \quad \text{– powierzchnia swobodna zaworu na odpływie}$$

Równanie dynamiki

$$A \frac{dh}{dt} = \underbrace{q_{we} - s\sqrt{2gh}}_{\text{funkcja nieliniowa}}$$

• **Linearyzacja**

Linearyzacją układów nieliniowych nazywamy zastąpienie układu nieliniowego jego liniowym przybliżeniem. Liniowe przybliżenie układu nieliniowego powinno możliwie dobrze odwzorowywać własności statyczne i dynamiczne układu nieliniowego. Jedną z metod linearyzacji jest rozwinięcie w szereg Taylora

$$f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u) = 0 \quad \text{gdzie} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}, \quad \text{itd.}$$

y – wielkość wyjściowa
u – wielkość wejściowa



Równanie charakterystyki statycznej (punkt równowagi)

$$f(y_0, 0, \dots, 0, u_0) = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} = 0$$

Stacyjny punkt pracy

$$S = (y_0, u_0)$$

Dynamiczny punkt pracy

$$D = (y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n)}, u_0)$$

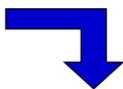
$$f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u) = 0$$

Rozwijając w szereg Taylora funkcję f, traktuje się ją jako funkcję (n+2) zmiennych niezależnych oraz pomija się nieliniowe człony rozwinięcia

$$f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u) \cong f(y_0, 0, \dots, 0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_S (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_S (\dot{y} - 0) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_S (y^{(n)} - 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_S (u - u_0)$$

Przesuwając początek układu współrzędnych do statycznego punktu pracy S, uzyskuje się zlinearyzowane równanie wiążące przyrosty

$$f(y_0, 0, \dots, 0, u_0) = 0$$



$$f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}, u) \cong \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_S \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_S \Delta \dot{y} + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_S \Delta y^{(n)} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_S \Delta u$$

$$\Delta y = y - y_0, \quad \Delta \dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_0, \dots, \quad \Delta u = u - u_0$$

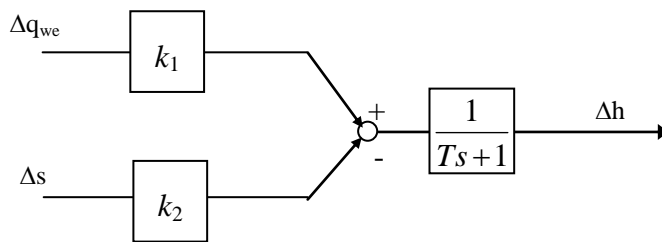
W celu przybliżenia funkcji nieliniowej przez funkcję liniową stosujemy *rozwiniecie w szereg Taylora* dla stanu nominalnego.

$$A \frac{d\Delta h}{dt} \cong 1 \cdot \Delta q_{we} - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta s - \bar{s} \frac{2g}{2\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta h$$

$$As \Delta H(s) = \Delta Q_{we}(s) - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta S(s) - \frac{\bar{s}g}{\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta H(s)$$

$$As \Delta H(s) + \frac{\bar{s}g}{\sqrt{2g\bar{h}}} \Delta H(s) = \Delta Q_{we}(s) - \sqrt{2g\bar{h}} \Delta S(s) \quad \Bigg/ \cdot \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{\bar{s}g}$$

$$\left(\underbrace{A \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{\bar{s}g}}_T s + 1 \right) \Delta H(s) = \underbrace{\frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{\bar{s}g}}_{k_1} \Delta Q_{we}(s) - \underbrace{\frac{2\bar{h}}{\bar{s}}}_{k_2} \Delta S(s)$$



Rys. 2.2. Obiekt inercyjny I-go rzędu

- Obliczenia

$$\bar{s} = \frac{\bar{q}_{we}}{\sqrt{2g\bar{h}}} = \frac{0.03}{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 10}} = 0.00214 \text{ m}^2 = 21.4 \text{ cm}^2$$

$$T = A \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{\bar{s}g} = 5 \frac{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 10}}{0.00214 \cdot 9.81} = 3336 \text{ s}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2g\bar{h}}}{\bar{s}g} = 667 \text{ m/m}^3/\text{s}, \quad k_2 = \frac{2\bar{h}}{\bar{s}} = \frac{2 \cdot 10}{0.00214} = 4673 \text{ m/m}^2$$

$$3336 \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = 667 \Delta q_{we} - 4673 \Delta s \quad \text{- czas w sekundach}$$

- Zmiana skali czasu i jednostki względne

$$\frac{3336}{3600} \frac{d\Delta h}{dt_h} + \Delta h = \frac{667}{3600} \Delta q_{we}^h - 4673 \Delta s \quad \text{- czas w godzinach}$$

$$0.926 \frac{d\Delta h}{dt_h} + \Delta h = 0.185 \Delta q_{we}^h - 4673 \Delta s \quad - \Delta q_{we}^h \text{ w m}^3/\text{h}$$

Jednostki względne (normalizacja)

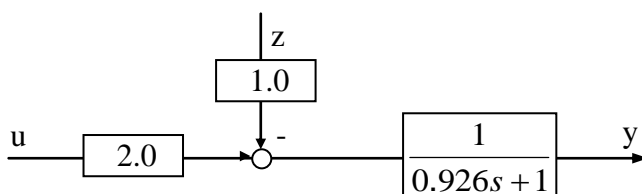
$$y = \frac{\Delta h}{h} \quad - \text{wyjście (zmienna procesowa)}$$

$$u = \frac{\Delta q_{we}}{q_{we}} \quad - \text{sterowanie}$$

$$z = \frac{\Delta s}{s} \quad - \text{zakłócenie}$$

$$0.926 \frac{d\left(\frac{\Delta h}{h}\right)}{dt_h} + \frac{\Delta h}{h} = 0.185 \frac{1}{h} \Delta q_{we}^h \frac{\overline{q_{we}^h}}{q_{we}^h} - 4673 \frac{1}{h} \Delta s \frac{\overline{s}}{s}$$

$$0.926 \frac{dy}{dt_h} + y = 2.0 u - 1.0 z$$



Po przeskalowaniu czasu i normalizacji zmiennych (jednostki względne) współczynniki w równaniu stają się rzędu 1. Jest to istotne dla implementacji mikrokomputerowej.

Zależność poziomu od stopnia otwarcia zaworu na odpływie

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta S(s)} = -\frac{k_2}{Ts + 1}$$

7.2. Bilans energii

Bilans energii stosujemy do tworzenia modeli matematycznych takich obiektów jak piece, suszarnie, reaktory, wymiennikownie, podgrzewacze itp.

$$E = M c T$$

gdzie:

| | |
|-----------------------------|-----------------------|
| E - energia, | ρ - gęstość |
| M - masa ($M = V\rho$), | T - temperatura |
| V - objętość obiektu, | c - ciepło właściwe |

Równanie bilansu można przedstawić jako

$$\frac{dE}{dt} = V\rho c \frac{dT}{dt} = \sum_i q_i \rho_i c_i T_i - \sum_j q_j \rho_j c_j T_j \pm \Delta P$$

ΔP - moc doprowadzona lub odprowadzona

7.3. Równanie momentów

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_o - D\omega, \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

gdzie:

J - moment bezwładności, M - moment wytwarzany
 ω - prędkość kątowna, M_o - moment obciążenia
 ϕ - kąt. D - współczynnik tarcia,