

Katedra Informatyki i Automatyki  
Politechniki Rzeszowskiej

# Wykład

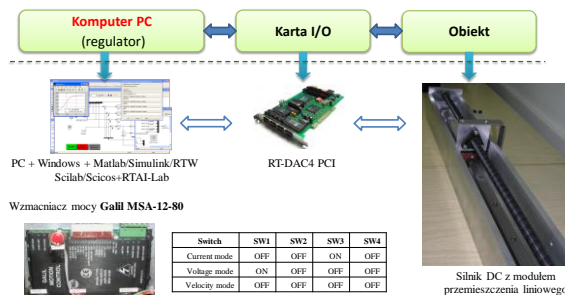
## Studium przypadku – serwomechanizmy

1. Modele matematyczne
2. Praktyczne metody identyfikacji parametrów modeli
3. Struktury regulacji stosowane w przemysłowych serwomechanizmach
4. Praktyczne metody strojenia regulatorów PID dla serwomechanizmów

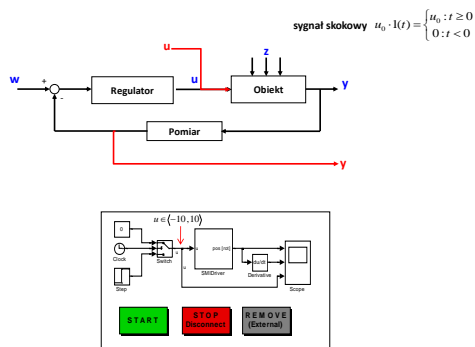
Żabiński Tomasz

### Studium przypadku (case study) – silnik prądu stałego

#### Stanowisko laboratoryjne – system szybkiego prototypowania

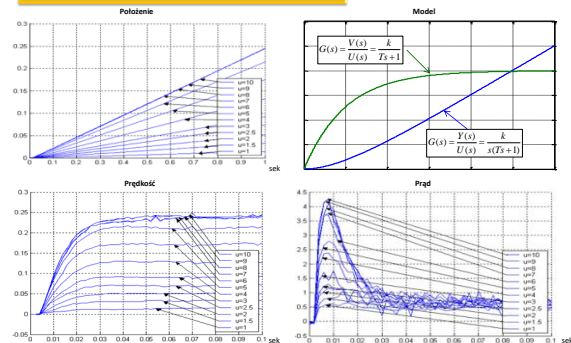


### Eksperyment identyfikacyjny – układ otwarty



### Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi - sterowany napięciowo

#### Odpowiedzi skokowe

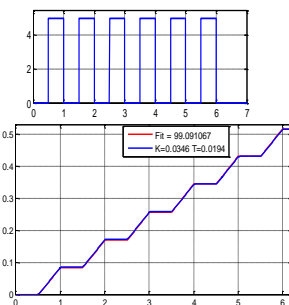
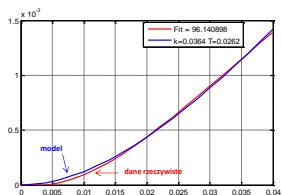


### Wyznaczenie parametrów

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

Y - położenie

- k i T – wartości wstępne
- **lscurvefit** (Matlab) – precyzyjne



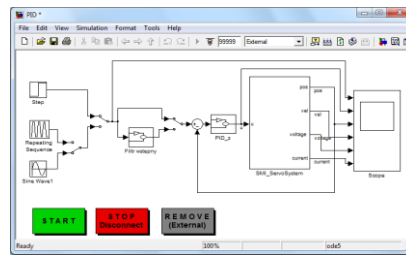
$$G(s) = \frac{0.036}{s(0.026s + 1)}$$

### Regulator PID

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s(Ts + 1)}$$

- dane k, T, czas regulacji  $t_r$ , odp. aper. krytyczne
- metoda linii pierwiastkowych

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)(s+z_1)}{s} \rightarrow \begin{cases} k_r = \frac{12 t_r + 3T}{k} \\ k_i = \frac{36}{k \cdot t_r^2} \\ k_d = \frac{12T}{k \cdot t_r} \end{cases}$$



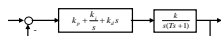
### Regulator PID - eksperymenty

Matlab

```
ts=0.8;
k=0.035;
T=0.025;
kp=12*(ts+3*T)/(k*ts^2) → 468.7
ki=36/(k*ts^2) → 1607.1
kd=12*T/(k*ts) → 10.7
```

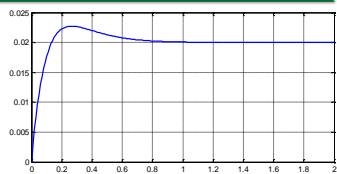
Symulacja

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)(s+z_1)}{s}$$

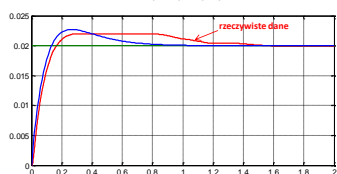


$$G_{c-i} = \frac{k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{Ts^3 + (1 + k k_d)s^2 + k k_p s + k k_i}$$

```
N=[k*kd k*kp k*ki]
D=[T (1+k*kd) k*kp k*ki]
t=0:0.01:2;
y=0.02*step(N,D,t);
plot(t,y),grid
```



Rzeczywisty eksperyment



### Regulator PID - eksperymenty

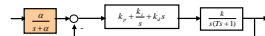
Matlab

```
ts=0.8;
k=0.035;
T=0.025;
kp=12*(ts+3*T)/(k*ts^2) → 468.7
ki=36/(k*ts^2) → 1607.1
kd=12*T/(k*ts) → 10.7
```

alpha=3/tr;

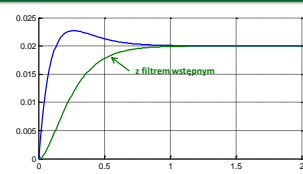
Symulacja - system z filtrem wstępnym

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)(s+z_1)}{s}$$

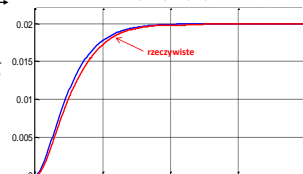


$$G_{c-i} = \frac{\alpha}{s + \alpha} \cdot \frac{k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{Ts^3 + (1 + k k_d)s^2 + k k_p s + k k_i}$$

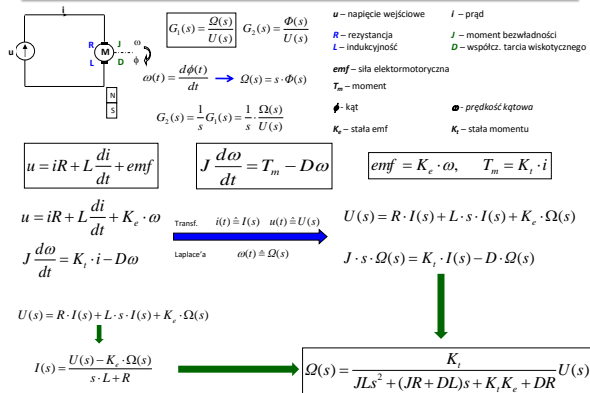
```
N=[k*kd k*kp k*ki]
D=[T (1+k*kd) k*kp k*ki]
N=alpha*N;
D=conv(1,alpha,D);
t=0:0.01:2;
y=0.02*step(N,D,t);
plot(t,y),grid
```



Rzeczywisty eksperyment



### Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi - model



### Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi - model

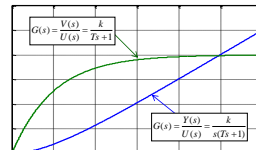
$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_t}{JLs^2 + (JR + DL)s + K_t K_e + DR}$$

W praktyce ta transmittancja posiada dwa rzeczywiste bieguny ujemne

$D \approx 0, L \approx 0$  Założenia: pominięcie tarcia, mała indukcyjność

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_t}{JL}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K_t K_e}{JL}}$$

$L \ll \frac{JR^2}{4K_t K_e}$



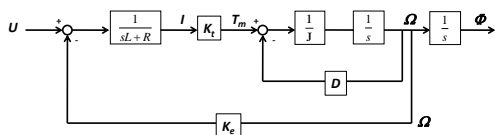
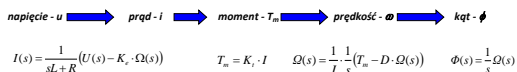
$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{K_e} \frac{1}{(T_{el}s + 1)(T_{me}s + 1)}$$

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1/K_e}{T_{me}s + 1}$$

$T_{el} = \frac{L}{R}$      $T_{me} = \frac{JR}{K_t K_e}$      $\tau_{el}$  – stała czasowa elektryczna  
 $\tau_{me}$  – stała czasowa mechaniczna

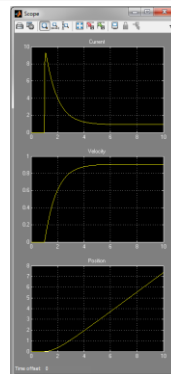
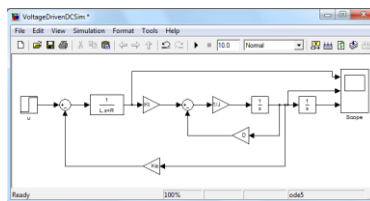
$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{1/K_e}{s(T_{me}s + 1)}$$

### Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – model Simulink

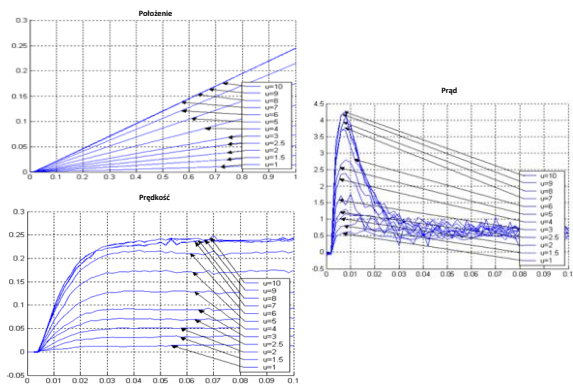


### Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – model Simulink

R=0.1;  
 Kt=1;  
 Ke=1;  
 J=10;  
 D=1;  
 L=0.1 \* (J \* R^2) / (4 \* Kt \* Ke);



Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi - sterowany napięciowo



Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi - sterowany prądowo

**Model**

prąd -  $i$  → moment -  $T_m$  → prędkość -  $\omega$  → kąt -  $\phi$

$F = m \cdot a, T = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$  Trans. Laplace'a  $G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{k}{s}, G_2(s) = \frac{\Phi(s)}{I(s)} = \frac{k}{s^2}, k = \frac{K_t}{J}$

"podwójny integrator" służy do modelowania napędów DC, AC i BLM (brush-less)

$CC = PI = k_p + \frac{k_i}{s}$  Projektowanie  $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$

Regulator prądu – projektowanie prosty przykład

$CC = PI = k_p + \frac{k_i}{s}$  Projektowanie  $G(s) = \frac{I(s)}{U(s)}$

$u = iR + L \frac{di}{dt} + K_e \cdot \omega$   $\rightarrow \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_t}{JLs^2 + (JR + D)s + K_t K_e + DR}$   $\xrightarrow[\substack{L \ll \frac{R^2}{4K_t K_e} \\ T_a \ll T_m}]{}$   $\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_t}{JR}}{s + \frac{K_t K_e}{JR}}$

$J \frac{d\omega}{dt} = K_t \cdot i - D\omega$   $\rightarrow \Omega(s) = \frac{K_t}{Js + D} I(s)$   $\xrightarrow{D=0}$   $I(s) = \frac{\frac{1}{R} s}{s + \frac{K_t K_e}{JR}}$

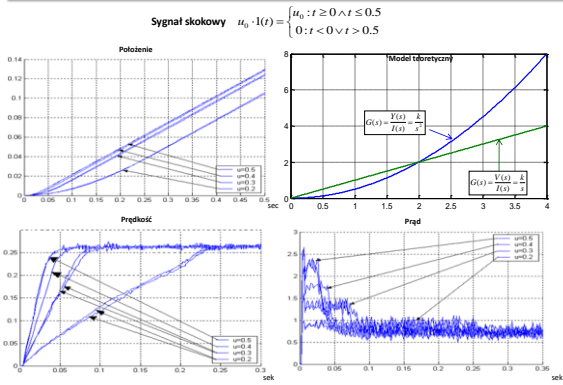
$CC = PI = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \frac{s+z}{s}, z = \frac{k_i}{k_p}$   $\rightarrow k_p = R, z = \frac{K_t K_e}{JR}$

$k_p = R, k_i = \frac{K_t K_e}{J}$

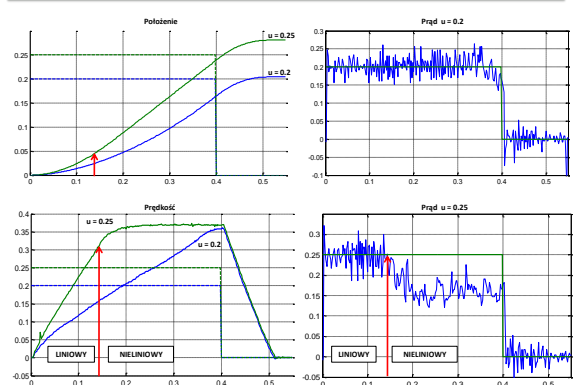
Silnik prądu stałego z magnesami trwałymi – model Simulink

R=0.1;  
 Kl=1;  
 Ke=1;  
 J=10;  
 D=0.01;  
 L=0.1\*(J\*R^2)/(4\*Kt\*Ke);  
 kp=R  
 ki=Kt\*Ke/J

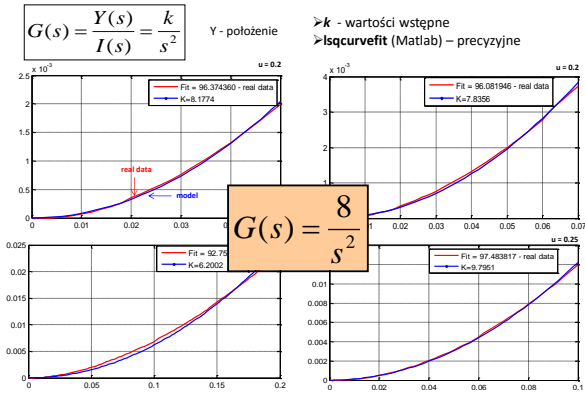
Rzeczywisty eksperyment odpowiedzi skokowej



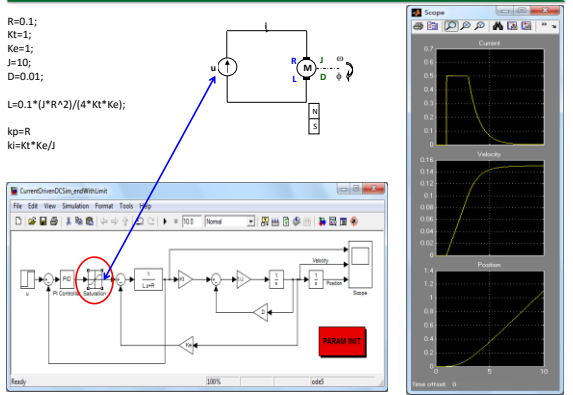
Rzeczywisty eksperyment odpowiedzi skokowej



Wyznaczenie parametrów transmitancji w zakresie liniowym



Bardziej realistyczny model - Simulink

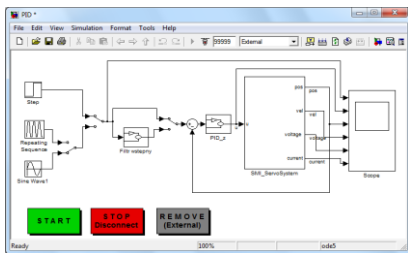


### Regulator PID

$$G(s) = \frac{Y(s)}{I(s)} = \frac{k}{s^2}$$

➤ dane  $k$ , czas regulacji  $t_r$ , odp. aper. krytyczne  
➤ metoda linii pierwiastkowych

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)^2}{s} \Rightarrow k_p = \frac{216}{k \cdot t_r^2}, k_i = \frac{432}{k \cdot t_r^3}, k_d = \frac{27}{k \cdot t_r}$$



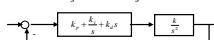
### Regulator PID - eksperymenty

Matlab  
k=8  
ts=0.5

kp=216/(k\*ts^2) ➔ 108  
ki=432/(k\*ts^3) ➔ 432  
kd=27/(k\*ts) ➔ 6.75

Symulacja

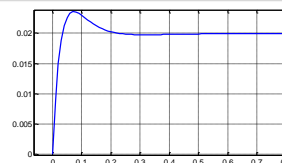
$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)^2}{s}$$



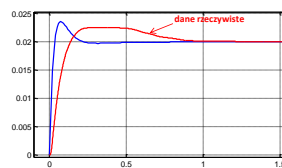
$$G_{c-i} = \frac{k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{s^3 + k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}$$

N=[k\*kd k\*kp k\*ki]  
D=[1 k\*kd k\*kp k\*ki]

t=0:0.1:2;  
y=0.02\*step(N,D,1);  
plot(t,y),grid



Rzeczywisty eksperyment



### Regulator PID - eksperymenty

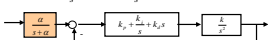
Matlab  
k=8  
ts=0.5

kp=216/(k\*ts^2) ➔ 108  
ki=432/(k\*ts^3) ➔ 432  
kd=27/(k\*ts) ➔ 6.75

alpha=4/tr

Symulacja z filtrem wstępnym

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_r \frac{(s+z)^2}{s}$$

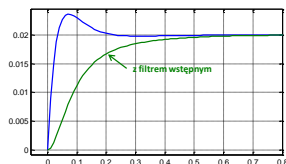


$$G_{c-i} = \frac{\alpha}{s+\alpha} \cdot \frac{k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}{s^3 + k(k_d s^2 + k_p s + k_i)}$$

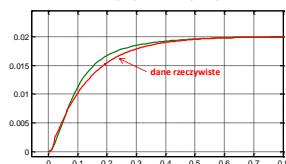
N=[k\*kd k\*kp k\*ki]  
D=[1 k\*kd k\*kp k\*ki]

Ns=[alpha\*N];  
Ds=conv([1 alpha],D);

t=0:0.1:2;  
y=0.02\*step(Ns,Ds,1);  
plot(t,y),grid

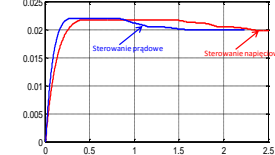


Eksperyment rzeczywisty

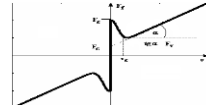


### Regulator PID – bardziej realistyczny model tarcia

Eksperyment rzeczywisty

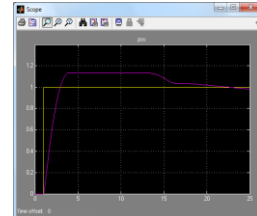
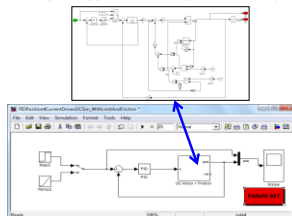


Statyczny model tarcia

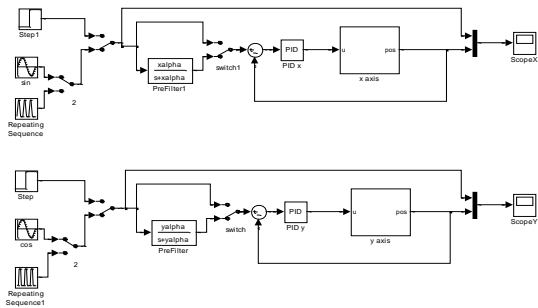


$F_s$  – tarcie statyczne  
 $F_v$  – tarcie kulomba

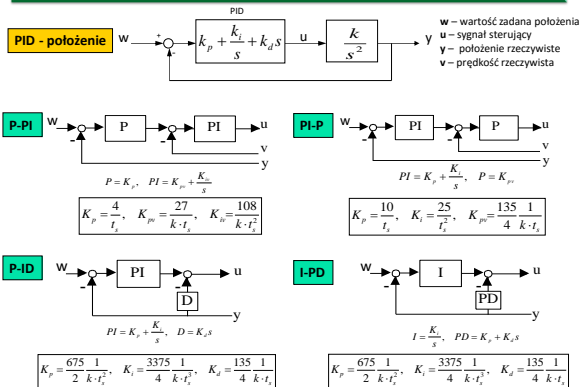
$F_v$  – tarcie wiskotyczne  
 $v_1$  – prędkość Striebecka



### Trajektoria 2D



### Struktury regulacji PID stosowane w serwomechanizmach



### Regulatory PID – układy dyskretne

$G(s) = \frac{k}{s^2} \xrightarrow{\text{ZOH-Zero Order Hold}} G(z) = \frac{k \Delta^2 (z+1)}{2 (z-1)^2}, \Delta - \text{czas cyklu}$

#### Dyskretny PID

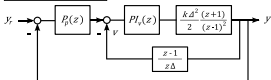


$$PID(z) = k_p + k_i \frac{z\Delta}{z-1} + k_d \frac{z-1}{z\Delta}$$

#### Strojenie

- dane k, czas regulacji  $t_r, \Delta$   $t_r > 45\Delta$
- 1.  $\alpha = 1 - \frac{4\Delta}{t_r}, K = 2.8(1-\alpha)$
- 2.  $k_p = \frac{4K\alpha(1-\alpha)}{k\Delta^2}, k_i = \frac{2K(\alpha-1)^2}{k\Delta^2}, k_d = \frac{2K\alpha^2}{k\Delta}$

#### Dyskretny P-PI



$$P_p(z) = K_p, PI_p(z) = K_p + K_i \frac{z\Delta}{z-1}$$

[T. Zabiński, L. Trybus, Tuning P-PI and PI-PI controllers for electrical servos, 2009]

### Regulatory PID – układy dyskretne

$G(s) = \frac{k}{s^2} \xrightarrow{\text{ZOH-Zero Order Hold}} G(z) = \frac{k \Delta^2 (z+1)}{2 (z-1)^2}, \Delta - \text{czas cyklu}$

#### Dyskretny PID

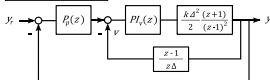


#### Strojenie

- dane k, czas regulacji  $t_r, \Delta$   $t_r > 45\Delta$

$t_r > 200 \cdot \Delta$  - nastawy wyliczone dla układu ciągłego mogą być bezpośrednio zastosowane w układzie dyskretnym

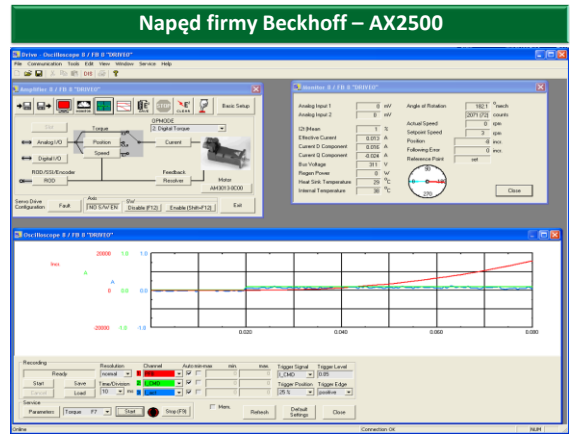
#### Dyskretny P-PI



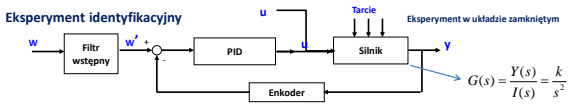
#### Strojenie

- 1.  $\alpha = 1 - \frac{4\Delta}{t_r}, K = 2.8(1-\alpha)$
- 2.  $k_p = \frac{1-\alpha}{\Delta\alpha}, k_{pi} = \frac{2K\alpha^2}{k\Delta}, k_{vi} = \frac{2K\alpha(1-\alpha)}{k\Delta^2}$

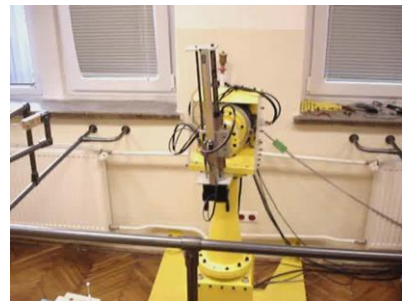
[T. Zabiński, L. Trybus, Tuning P-PI and PI-PI controllers for electrical servos, 2009]



**Przykład rzeczywistego eksperymentu**



**Robot with Direct Drives - NSK Megatorque**





Quadrotor

